交換子群について

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

本資料は、代数学 I の講義第 11 回の補足資料である．群 G において、その交換子群 $D(G)$ が G の正規部分群であることを 2 つの視点から説明する．

定義. G を群とする．各 $g_1, g_2 \in G$ に対し、g_1 と g_2 **の交換子** (commutator of g_1 and g_2)$[g_1, g_2]$ を、

$$[g_1, g_2] := g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$$

と定義する．さらに、G **の交換子群** (commutator subgroup of G)$D(G)$ を、

$$D(G) := \langle \{[g_1, g_2] \mid g_1, g_2 \in G\} \rangle$$

と定義する．ここで、右辺は交換子全体 $\{[g_1, g_2] \mid g_1, g_2 \in G\}$ の生成する群である．

注意 1. (1) 各 $g_1, g_2 \in G$ に対し、$[g_1, g_2]^{-1} = (g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1})^{-1} = g_2 g_1 g_2^{-1} g_1^{-1} = [g_2, g_1]$ である．

(2) $\{[g_1, g_2] \mid g_1, g_2 \in G\}$ は (1) より逆元では閉じるが、一般に 2 項演算では閉じておらず、これ自体は群にはならない．

命題

群 G に対し、$D(G)$ は G の正規部分群である．

命題の証明のために、以下の補題を用いる．

補題 1. 群 G とその部分集合 S に対し、

$$N(S) = G\text{、つまり、「任意の } g \in G \text{ に対し、} gSg^{-1} \subset S\text{」}$$

が成立するとき、S の生成する G の部分群 $\langle S \rangle$ は G の正規部分群である．

補題 1 の証明. 任意の $\langle S \rangle$ の元 s は

$$s = s_1^{m_1} s_2^{m_2} \cdots s_n^{m_n} \ (\text{ただし、} s_1, s_2, \ldots, s_n \in S\text{、} m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}\text{、} n \in \mathbb{Z}_{>0})$$

と書ける．このとき、各 $g \in G$ に対し、$\varphi_g \colon G \to G, h \mapsto ghg^{-1}$ とすると、φ_g は群準同型写像 (実は同型) であるので、

$$gsg^{-1} = \varphi_g(s) = \varphi_g(s_1)^{m_1} \varphi_g(s_2)^{m_2} \cdots \varphi_g(s_n)^{m_n}$$

となるが、仮定より、$\varphi_g(s_1), \varphi_g(s_2), \ldots, \varphi_g(s_n) \in S$ なので、上式の右辺は再び $\langle S \rangle$ の元であって、$gsg^{-1} \in \langle S \rangle$ である．よって、任意の $g \in G$ に対し、$g\langle S \rangle g^{-1} \subset \langle S \rangle$ となり、$\langle S \rangle$ は G の正規部分群である． □

命題の証明. 補題 1 と交換子群の定義より、

$$\text{任意の } g, h_1, h_2 \in G \text{ に対し、} g[h_1, h_2]g^{-1} \in \{[g_1, g_2] \mid g_1, g_2 \in G\}$$

* Department of Mathematical Sciences, Shibaura Institute of Technology, 307 Fukasaku, Minuma-ku, Saitama-shi, Saitama, 337-8570, JAPAN *e-mail* : hoya@shibaura-it.ac.jp

を示せばよいことがわかる[*1]. 今 $\varphi_g\colon G \to G, h \mapsto ghg^{-1}$ が群準同型写像であることより、

$$g[h_1,h_2]g^{-1} = \varphi_g([h_1,h_2]) = \varphi_g(h_1h_2h_1^{-1}h_2^{-1}) = \varphi_g(h_1)\varphi_g(h_2)\varphi_g(h_1)^{-1}\varphi_g(h_2)^{-1} = [\varphi_g(h_1),\varphi_g(h_2)].$$

よって、$g[h_1,h_2]g^{-1} \in \{[g_1,g_2] \mid g_1,g_2 \in G\}$ であり、示すべきことは示された. □

命題は、以下の補題の系としても証明することができる.

補題 2. 群 G, G' とその間の任意の群準同型 $f\colon G \to G'$ に対し、

$$f(D(G)) = D(\operatorname{Im} f).$$

補題 2 の証明. 各 $g_1, g_2 \in G$ に対し、

$$f([g_1,g_2]) = f(g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}) = f(g_1)f(g_2)f(g_1)^{-1}f(g_2)^{-1} = [f(g_1),f(g_2)].$$

これより、

$$\begin{aligned}
&f(D(G))\\
&= f\left(\left\{[g_1^{(1)},g_2^{(1)}]^{m_1}[g_1^{(2)},g_2^{(2)}]^{m_2}\cdots[g_1^{(n)},g_2^{(n)}]^{m_n} \mid g_1^{(k)},g_2^{(k)} \in G, m_k \in \mathbb{Z}, 1 \le k \le n, n \in \mathbb{Z}_{>0}\right\}\right)\\
&= \left\{[f(g_1^{(1)}),f(g_2^{(1)})]^{m_1}[f(g_1^{(2)}),f(g_2^{(2)})]^{m_2}\cdots[f(g_1^{(n)}),f(g_2^{(n)})]^{m_n} \mid g_1^{(k)},g_2^{(k)} \in G, m_k \in \mathbb{Z}, 1 \le k \le n, n \in \mathbb{Z}_{>0}\right\}\\
&= D(\operatorname{Im} f).
\end{aligned}$$

□

命題の別証明. 任意の $g \in G$ をとり、群の同型写像 $\varphi_g\colon G \to G, h \mapsto ghg^{-1}$ に対して、補題 2 を用いると、

$$gD(G)g^{-1} = \varphi_g(D(G)) = D(\operatorname{Im}\varphi_g) = D(G).$$

ここで φ_g は同型写像なので、特に全射 (つまり $\operatorname{Im}\varphi_g = G$) であることに注意する. よって、$D(G)$ は G の正規部分群である. □

[*1] 補題 1 における S が $\{[g_1,g_2] \mid g_1,g_2 \in G\}$ である.