代数学 I 期末テスト

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)

- 試験時間は 85 分である.
- 解答は日本語または英語で行うこと. また、どの問の解答であるかを明確に記したうえで解答すること.
- 名前、学籍番号の書き忘れには十分注意すること.

問題 1. 5 次対称群を $\mathfrak{S}_5$ と書く.

(1) $X := \{1,2,3,4,5\}$ としたとき、

$$\mathfrak{S}_5 \times X \to X, (\sigma, i) \mapsto \sigma.i := \sigma(i)$$

は X 上の $\mathfrak{S}_5$ の作用を定める. このとき、$\mathfrak{S}_5$ の $1 \in X$ における固定部分群 $(\mathfrak{S}_5)_1$ の位数、および商集合 $\mathfrak{S}_5/(\mathfrak{S}_5)_1$ の元の個数を求めよ. ただし、計算の過程も説明すること.

(2) $\widetilde{X} := \{\{i,j\} \mid i,j \in X, i \neq j\}$ としたとき、

$$\mathfrak{S}_5 \times \widetilde{X} \to \widetilde{X}, (\sigma, \{i,j\}) \mapsto \sigma.\{i,j\} := \{\sigma(i), \sigma(j)\}$$

は $\widetilde{X}$ 上の $\mathfrak{S}_5$ の作用を定める. (ここで、$\{i,j\}$ は i,j の 2 元からなる集合の意味であり、特に $\{i,j\} = \{j,i\}$ であることに注意する.) このとき、$\mathfrak{S}_5$ の $\{2,4\} \in \widetilde{X}$ における固定部分群 $(\mathfrak{S}_5)_{\{2,4\}}$ の位数、および商集合 $\mathfrak{S}_5/(\mathfrak{S}_5)_{\{2,4\}}$ の元の個数を求めよ. ただし、計算の過程も説明すること.

(3) X の相異なる 2 元 i,j に対し、

$$f_{ij}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) := \varepsilon_{ij}(x_i - x_j).$$

ただし、$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & i<j \text{ のとき} \\ -1 & i>j \text{ のとき} \end{cases}$ とする. (例えば $f_{25}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \varepsilon_{25}(x_2 - x_5) = x_2 - x_5 = \varepsilon_{52}(x_5 - x_2) = f_{52}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$.) このとき、$f_{ij}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = f_{ji}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ となるので、各 $\{i,j\} \in \widetilde{X}$ に対し、

$$f_{\{i,j\}}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) := f_{ij}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = f_{ji}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$$

とおく. いま、x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 の 5 変数多項式

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) &= \prod_{\{i,j\} \in \widetilde{X}} f_{\{i,j\}}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \\ &= (x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)(x_3-x_4)(x_3-x_5)(x_4-x_5) \end{aligned}$$

を考える. このとき、任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_5$ に対し、$\varepsilon(\sigma) \in \{1,-1\}$ が存在して、

$$f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, x_{\sigma(5)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$$

となることを示せ.

(4) (3) で得られる対応 $\varepsilon\colon \mathfrak{S}_5 \to \{1,-1\}, \sigma \mapsto \varepsilon(\sigma)$ は群準同型となることを証明せよ. また、その核 $\operatorname{Ker}\varepsilon$ の位数を求めよ. ただし、計算の過程も説明すること.

問題 2. G を位数 18 の有限群とする.

(1) $\widetilde{X} := \{\{g_1, g_2, g_3\} \subset G \mid g_1, g_2, g_3$は相異なる G の 3 元 $\}$ とする．このとき、$\widetilde{X}$ の元の個数を求めよ (答えのみでよい).

(2)
$$G \times \widetilde{X} \to \widetilde{X}, (g, \{g_1, g_2, g_3\}) \mapsto \{gg_1, gg_2, gg_3\}$$
は $\widetilde{X}$ 上の G の作用を定める．この作用に関する $\{g_1, g_2, g_3\} \in \widetilde{X}$ の元の固定部分群 $G_{\{g_1,g_2,g_3\}}$ の位数は 3 以下であることを証明せよ.

(3) (2) の $\widetilde{X}$ 上の G の作用は元の個数が 6 である軌道を少なくとも 1 つ持つことを証明せよ.

(4) G は位数 3 の部分群を少なくとも 1 つ持つことを証明せよ.

問題 3. n 次 2 面体群を
$$D_n = \{e, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{n-1}, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \ldots, \sigma^{n-1}\tau\}$$
と書く．ここで、$\sigma^n = e$、$\tau^2 = e$、$\sigma\tau = \tau\sigma^{-1}$ である．以下の問に答えよ.

(1) n を 3 以上の整数、k、$\ell \in \{0, 1 \ldots, n-1\}$ とする．このとき、以下の D_n の元 (a)、(b)、(c)、(d) を再び $\sigma^{m'}$、あるいは $\sigma^{m'}\tau$ ($m' \in \mathbb{Z}$) の形で表せ (答えのみでよい).

(a) $\sigma^k(\sigma^\ell)(\sigma^k)^{-1}$ (b) $\sigma^k(\sigma^\ell\tau)(\sigma^k)^{-1}$ (c) $(\sigma^k\tau)(\sigma^\ell)(\sigma^k\tau)^{-1}$ (d) $(\sigma^k\tau)(\sigma^\ell\tau)(\sigma^k\tau)^{-1}$.

(2) D_3 の共役類を具体的な元を用いてすべて記述せよ (答えのみでよい).

(3) n を 3 以上の整数、k、$\ell \in \{0, 1 \ldots, n-1\}$ とする．このとき、以下の D_n の元 (a)、(b)、(c)、(d) を再び $\sigma^{m'}$、あるいは $\sigma^{m'}\tau$ ($m' \in \mathbb{Z}$) の形で表せ (答えのみでよい).

(a) $[\sigma^k, \sigma^\ell]$ (b) $[\sigma^k, \sigma^\ell\tau]$ (c) $[\sigma^k\tau, \sigma^\ell]$ (d) $[\sigma^k\tau, \sigma^\ell\tau]$.

ここで、任意の 2 元 $g, h \in D_n$ に対し、$[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$ である.

(4) D_4 の交換子群 $D(D_4)$ を具体的な元を用いて記述せよ (答えのみでよい)．また、D_4 が可解か非可解かを理由を付けて述べよ.

問題 4. 以下の事実を証明せよ.

(1) $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ は同型である.

(2) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は同型でない.

(3) 2 次一般線型群 $GL_2(\mathbb{R})$ の元 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ は位数が無限である.

問題は以上である.