代数学 I 期末テスト予告問題 + 解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

- 代数学 I の成績は中間試験 40 %、期末試験 60 %の配分で付けられる．出席等は考慮されない．
- 問題 1–3 のうち 1 問、問題 4–5 のうち 1 問が出題される．
- 予告問題の配点は 100 点満点のうち 60 点の予定である．

問題 1

5 次対称群を $\mathfrak{S}_5$ と書く．

(1) $X := \{1,2,3,4,5\}$ としたとき、

$$\mathfrak{S}_5 \times X \to X, (\sigma, i) \mapsto \sigma.i := \sigma(i)$$

は X 上の $\mathfrak{S}_5$ の作用を定める．このとき、$\mathfrak{S}_5$ の $1 \in X$ における固定部分群 $(\mathfrak{S}_5)_1$ の位数、および商集合 $\mathfrak{S}_5/(\mathfrak{S}_5)_1$ の元の個数を求めよ．ただし、計算の過程も説明すること．

(2) $\widetilde{X} := \{\{i,j\} \mid i,j \in X, i \neq j\}$ としたとき、

$$\mathfrak{S}_5 \times \widetilde{X} \to \widetilde{X}, (\sigma, \{i,j\}) \mapsto \sigma.\{i,j\} := \{\sigma(i), \sigma(j)\}$$

は $\widetilde{X}$ 上の $\mathfrak{S}_5$ の作用を定める．（ここで、$\{i,j\}$ は i,j の 2 元からなる集合の意味であり、特に $\{i,j\} = \{j,i\}$ であることに注意する.）このとき、$\mathfrak{S}_5$ の $\{2,4\} \in \widetilde{X}$ における固定部分群 $(\mathfrak{S}_5)_{\{2,4\}}$ の位数、および商集合 $\mathfrak{S}_5/(\mathfrak{S}_5)_{\{2,4\}}$ の元の個数を求めよ．ただし、計算の過程も説明すること．

(3) X の相異なる 2 元 i,j に対し、

$$f_{ij}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) := \varepsilon_{ij}(x_i - x_j).$$

ただし、$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & i<j \text{ のとき} \\ -1 & i>j \text{ のとき} \end{cases}$ とする．（例えば $f_{25}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \varepsilon_{25}(x_2 - x_5) = x_2 - x_5 = \varepsilon_{52}(x_5 - x_2) = f_{52}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$.） このとき、$f_{ij}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = f_{ji}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ となるので、各 $\{i,j\} \in \widetilde{X}$ に対し、

$$f_{\{i,j\}}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) := f_{ij}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = f_{ji}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$$

とおく．いま、x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 の 5 変数多項式

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) &= \prod_{\{i,j\}\in\widetilde{X}} f_{\{i,j\}}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \\ &= (x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)(x_3-x_4)(x_3-x_5)(x_4-x_5) \end{aligned}$$

を考える．このとき、任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_5$ に対し、$\varepsilon(\sigma) \in \{1,-1\}$ が存在して、

$$f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, x_{\sigma(5)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$$

となることを示せ．

(4) (3) で得られる対応 $\varepsilon\colon \mathfrak{S}_5 \to \{1,-1\}, \sigma \mapsto \varepsilon(\sigma)$ は群準同型となることを証明せよ．また、その核 $\operatorname{Ker}\varepsilon$ の位数を求めよ．ただし、計算の過程も説明すること．

* Department of Mathematical Sciences, Shibaura Institute of Technology, 307 Fukasaku, Minuma-ku, Saitama-shi, Saitama, 337-8570, JAPAN *e-mail* : hoya@shibaura-it.ac.jp

問題 1 解答例.

(1)

$$\begin{aligned}(\mathfrak{S}_5)_1 &= \{\sigma \in \mathfrak{S}_5 \mid \sigma(1) = 1\}\\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_5 \,\middle|\, \{i_1, i_2, i_3, i_4\} = \{2,3,4,5\} \right\}.\end{aligned}$$

よって、$(\mathfrak{S}_5)_1$ の位数は $2,3,4,5$ の 4 文字を 1 列に並べる場合の数と等しく、$4! = 24$ である. さらに $|\mathfrak{S}_5| = |\mathfrak{S}_5/(\mathfrak{S}_5)_1| \cdot |(\mathfrak{S}_5)_1|$ より、

$$|\mathfrak{S}_5/(\mathfrak{S}_5)_1| = \frac{|\mathfrak{S}_5|}{|(\mathfrak{S}_5)_1|} = \frac{5!}{4!} = 5.$$

□

((1) 後半別解) $\mathfrak{S}_5/(\mathfrak{S}_5)_1$ の元の個数は $1 \in X$ を含む軌道 $\mathfrak{S}_5.1$ の元の個数に等しいが、任意の $i \in X$ に対して、$\sigma(1) = i$ となる $\sigma \in \mathfrak{S}_5$ が取れるので、$\mathfrak{S}_5.1 = X$. よって、求める元の個数は 5. □

(2)

$$\begin{aligned}(\mathfrak{S}_5)_{\{2,4\}} &= \{\sigma \in \mathfrak{S}_5 \mid \{\sigma(2), \sigma(4)\} = \{2,4\}\}\\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ j_1 & i_1 & j_2 & i_2 & j_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_5 \,\middle|\, \{i_1, i_2\} = \{2,4\}, \{j_1, j_2, j_3\} = \{1,3,5\} \right\}.\end{aligned}$$

よって、$(\mathfrak{S}_5)_{\{2,4\}}$ の位数は $2,4$ の 2 文字を 1 列に並べる場合の数と $1,3,5$ の 3 文字を 1 列に並べる場合の数の積に等しく、$2! \times 3! = 12$. さらに $|\mathfrak{S}_5| = |\mathfrak{S}_5/(\mathfrak{S}_5)_{\{2,4\}}| \cdot |(\mathfrak{S}_5)_{\{2,4\}}|$ より、

$$|\mathfrak{S}_5/(\mathfrak{S}_5)_{\{2,4\}}| = \frac{|\mathfrak{S}_5|}{|(\mathfrak{S}_5)_{\{2,4\}}|} = \frac{5!}{12} = 10.$$

□

((2) 後半別解) $\mathfrak{S}_5/(\mathfrak{S}_5)_{\{2,4\}}$ の元の個数は $\{2,4\} \in \widetilde{X}$ を含む軌道 $\mathfrak{S}_5.\{2,4\}$ の元の個数に等しいが、任意の $\{i,j\} \in \widetilde{X}$ に対して、$\sigma(2) = i$ かつ $\sigma(4) = j$ となる $\sigma \in \mathfrak{S}_5$ を取ると、$\sigma.\{2,4\} = \{i,j\}$ となるので、$\mathfrak{S}_5.\{2,4\} = \widetilde{X}$. よって、求める元の個数は ${}_5\mathrm{C}_2 = \dfrac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$. □

(3) 各 $\{i,j\} \in \widetilde{X}$ に対し、

$$\begin{aligned}f_{\{i,j\}}(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, x_{\sigma(5)}) &= \varepsilon_{ij}(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)})\\ &= \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_{\sigma(i)\sigma(j)}} \varepsilon_{\sigma(i)\sigma(j)}(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)})\\ &= \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_{\sigma(i)\sigma(j)}} f_{\{\sigma(i),\sigma(j)\}}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5).\end{aligned}$$

これより、

$$\begin{aligned}f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, x_{\sigma(5)}) &= \prod_{\{i,j\} \in \widetilde{X}} f_{\{i,j\}}(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, x_{\sigma(5)})\\ &= \prod_{\{i,j\} \in \widetilde{X}} \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_{\sigma(i)\sigma(j)}} \prod_{\{i,j\} \in \widetilde{X}} f_{\{\sigma(i),\sigma(j)\}}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)\end{aligned}$$

一方各 $\sigma \in \mathfrak{S}_5$ に対し、(2) の作用で定まる対応 $\widetilde{X} \to \widetilde{X}, \{i,j\} \mapsto \sigma.\{i,j\} = \{\sigma(i), \sigma(j)\}$ は 1 対 1 なので、$\widetilde{X} = \{\{\sigma(i), \sigma(j)\} \mid \{i,j\} \in \widetilde{X}\}$. よって、

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \prod_{\{i,j\} \in \widetilde{X}} f_{\{i,j\}}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \prod_{\{i,j\} \in \widetilde{X}} f_{\{\sigma(i),\sigma(j)\}}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5).$$

以上より、

$$f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, x_{\sigma(5)}) = \left(\prod_{\{i,j\} \in \widetilde{X}} \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_{\sigma(i)\sigma(j)}} \right) f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5).$$

いま $\displaystyle\prod_{\{i,j\} \in \widetilde{X}} \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_{\sigma(i)\sigma(j)}}$ は 1 または -1 なので、示すべきことは示された. □

(4) 任意の 2 元 $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_5$ をとる. このとき、

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) := f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, x_{\tau(3)}, x_{\tau(4)}, x_{\tau(5)}) = \varepsilon(\tau) f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

とすると、$g(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, x_{\sigma(5)}) = f(x_{\sigma\tau(1)}, x_{\sigma\tau(2)}, x_{\sigma\tau(3)}, x_{\sigma\tau(4)}, x_{\sigma\tau(5)})$. よって、

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\sigma\tau) f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= f(x_{\sigma\tau(1)}, x_{\sigma\tau(2)}, x_{\sigma\tau(3)}, x_{\sigma\tau(4)}, x_{\sigma\tau(5)}) \\
&= g(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, x_{\sigma(5)}) \\
&= \varepsilon(\tau) f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}, x_{\sigma(5)}) \\
&= \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau) f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5).
\end{aligned}$$

となるので、$\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$. よって、$\varepsilon$ は群準同型である. また、

$$\begin{aligned}
&f(x_2, x_1, x_3, x_4, x_5) \\
&= (x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_2 - x_5)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_1 - x_5)(x_3 - x_4)(x_3 - x_5)(x_4 - x_5) \\
&= -f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)
\end{aligned}$$

より、$\varepsilon((1\ 2)) = -1$. よって、$\varepsilon(e) = 1$ と合わせると、ε は全射群準同型. これより準同型定理から、

$$\mathfrak{S}_5 / \operatorname{Ker} \varepsilon \simeq \{1, -1\}$$

となるので、$|\mathfrak{S}_5 / \operatorname{Ker} \varepsilon| = 2$. $|\mathfrak{S}_5| = |\mathfrak{S}_5 / \operatorname{Ker} \varepsilon| \cdot |\operatorname{Ker} \varepsilon|$ と合わせると、

$$|\operatorname{Ker} \varepsilon| = \frac{|\mathfrak{S}_5|}{|\mathfrak{S}_5 / \operatorname{Ker} \varepsilon|} = \frac{5!}{2} = 60.$$

□

((4) : ε が準同型写像であることの別解) (3) より各 $\sigma \in \mathfrak{S}_5$ に対し、$\varepsilon(\sigma) = \displaystyle\prod_{\{i,j\} \in \widetilde{X}} \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_{\sigma(i)\sigma(j)}}$ であるので、任意の 2 元 $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_5$ に対し、

$$\varepsilon(\sigma\tau) = \prod_{\{i,j\} \in \widetilde{X}} \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_{\sigma\tau(i)\sigma\tau(j)}} = \prod_{\{i,j\} \in \widetilde{X}} \frac{\varepsilon_{\tau(i)\tau(j)}}{\varepsilon_{\sigma\tau(i)\sigma\tau(j)}} \prod_{\{i,j\} \in \widetilde{X}} \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_{\tau(i)\tau(j)}} = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau).$$

ここで、最後の等式においては $\widetilde{X} = \{\{\tau(i), \tau(j)\} \mid \{i, j\} \in \widetilde{X}\}$ を用いた. よって、ε は群準同型である. □

問題 2

4 次対称群を $\mathfrak{S}_4$ と書く.

(1) $\widetilde{X} := \{\{i,j\} \mid i,j$ は 1 以上 4 以下の相異なる整数 $\}$ としたとき、

$$\mathfrak{S}_4 \times \widetilde{X} \to \widetilde{X}, (\sigma, \{i,j\}) \mapsto \sigma.\{i,j\} := \{\sigma(i), \sigma(j)\}$$

は $\widetilde{X}$ 上の $\mathfrak{S}_4$ の作用を定める.（ここで、$\{i,j\}$ は i,j の 2 元からなる集合の意味であり、特に $\{i,j\} = \{j,i\}$ であることに注意する.）このとき、$\mathfrak{S}_4$ の $\{1,2\} \in \widetilde{X}$ における固定部分群 $(\mathfrak{S}_4)_{\{1,2\}}$ の位数、および商集合 $\mathfrak{S}_4/(\mathfrak{S}_4)_{\{1,2\}}$ の元の個数を求めよ. ただし、計算の過程も説明すること.

(2) $\{1,2,3,4\}$ の相異なる 2 元 i,j に対し、

$$f_{ij}(x_1,x_2,x_3,x_4) := \varepsilon_{ij}(x_i - x_j).$$

ただし、$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & i<j \text{ のとき} \\ -1 & i>j \text{ のとき} \end{cases}$ とする.（例えば $f_{24}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \varepsilon_{24}(x_2 - x_4) = x_2 - x_4 = \varepsilon_{42}(x_4 - x_2) = f_{42}(x_1,x_2,x_3,x_4)$.）このとき、$f_{ij}(x_1,x_2,x_3,x_4) = f_{ji}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ となるので、各 $\{i,j\} \in \widetilde{X}$ に対し、

$$f_{\{i,j\}}(x_1,x_2,x_3,x_4) := f_{ij}(x_1,x_2,x_3,x_4) = f_{ji}(x_1,x_2,x_3,x_4)$$

とおく. いま、x_1,x_2,x_3,x_4 の 4 変数多項式

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \prod_{\{i,j\} \in \widetilde{X}} f_{\{i,j\}}(x_1,x_2,x_3,x_4) \\ &= (x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_3-x_4) \end{aligned}$$

を考える. このとき、任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_5$ に対し、$\varepsilon(\sigma) \in \{1,-1\}$ が存在して、

$$f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1,x_2,x_3,x_4)$$

となることを示せ.

(3) (2) で得られる対応 $\varepsilon\colon \mathfrak{S}_4 \to \{1,-1\}, \sigma \mapsto \varepsilon(\sigma)$ は群準同型となることを証明せよ. また、その核 $\operatorname{Ker}\varepsilon$ の位数を求めよ.　ただし、計算の過程も説明すること.

(4) (3) の $\operatorname{Ker}\varepsilon$ は $\{(i\ i+1)(j\ j+1) \mid i,j \in \{1,2,3\}\}$ で生成されることを証明せよ.

問題 2 解答例.

(1)

$$\begin{aligned} (\mathfrak{S}_4)_{\{1,2\}} &= \{\sigma \in \mathfrak{S}_4 \mid \{\sigma(1), \sigma(2)\} = \{1,2\}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i_1 & i_2 & j_1 & j_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_4 \,\middle|\, \{i_1,i_2\} = \{1,2\}, \{j_1,j_2\} = \{3,4\} \right\}. \end{aligned}$$

よって、$(\mathfrak{S}_4)_{\{1,2\}}$ の位数は $1,2$ の 2 文字を 1 列に並べる場合の数と $3,4$ の 2 文字を 1 列に並べる場合の数の積に等しく、$2! \times 2! = 4$. さらに $|\mathfrak{S}_4| = |\mathfrak{S}_4/(\mathfrak{S}_4)_{\{1,2\}}| \cdot |(\mathfrak{S}_4)_{\{1,2\}}|$ より、

$$|\mathfrak{S}_4/(\mathfrak{S}_4)_{\{1,2\}}| = \frac{|\mathfrak{S}_4|}{|(\mathfrak{S}_4)_{\{1,2\}}|} = \frac{4!}{4} = 6.$$

□

((1) 後半別解) $\mathfrak{S}_4/(\mathfrak{S}_4)_{\{1,2\}}$ の元の個数は $\{1,2\} \in \widetilde{X}$ を含む軌道 $\mathfrak{S}_4.\{1,2\}$ の元の個数に等しいが、任意の $\{i,j\} \in \widetilde{X}$ に対して、$\sigma(1) = i$ かつ $\sigma(2) = j$ となる $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ を取ると、$\sigma.\{1,2\} = \{i,j\}$ となるので、$\mathfrak{S}_4.\{1,2\} = \widetilde{X}$. よって、求める元の個数は ${}_4\mathrm{C}_2 = \dfrac{4\times 3}{2\times 1} = 6$. □

(2) 各 $\{i,j\} \in \widetilde{X}$ に対し、

$$\begin{aligned} f_{\{i,j\}}(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}) &= \varepsilon_{ij}(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}) \\ &= \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_{\sigma(i)\sigma(j)}} \varepsilon_{\sigma(i)\sigma(j)}(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}) \\ &= \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_{\sigma(i)\sigma(j)}} f_{\{\sigma(i),\sigma(j)\}}(x_1, x_2, x_3, x_4). \end{aligned}$$

これより、

$$\begin{aligned} f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}) &= \prod_{\{i,j\}\in\widetilde{X}} f_{\{i,j\}}(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}) \\ &= \prod_{\{i,j\}\in\widetilde{X}} \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_{\sigma(i)\sigma(j)}} \prod_{\{i,j\}\in\widetilde{X}} f_{\{\sigma(i),\sigma(j)\}}(x_1, x_2, x_3, x_4) \end{aligned}$$

一方各 $\sigma \in \mathfrak{S}_5$ に対し、(1) の作用で定まる対応 $\widetilde{X} \to \widetilde{X}, \{i,j\} \mapsto \sigma.\{i,j\} = \{\sigma(i), \sigma(j)\}$ は 1 対 1 なので、$\widetilde{X} = \{\{\sigma(i), \sigma(j)\} \mid \{i,j\} \in \widetilde{X}\}$. よって、

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \prod_{\{i,j\}\in\widetilde{X}} f_{\{i,j\}}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \prod_{\{i,j\}\in\widetilde{X}} f_{\{\sigma(i),\sigma(j)\}}(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

以上より、

$$f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}) = \left(\prod_{\{i,j\}\in\widetilde{X}} \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_{\sigma(i)\sigma(j)}}\right) f(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

いま $\displaystyle\prod_{\{i,j\}\in\widetilde{X}} \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_{\sigma(i)\sigma(j)}}$ は 1 または -1 なので、示すべきことは示された. □

(3) 任意の 2 元 $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_4$ をとる. このとき、

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) := f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, x_{\tau(3)}, x_{\tau(4)}) = \varepsilon(\tau) f(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

とすると、$g(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}) = f(x_{\sigma\tau(1)}, x_{\sigma\tau(2)}, x_{\sigma\tau(3)}, x_{\sigma\tau(4)})$. よって、

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma\tau) f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= f(x_{\sigma\tau(1)}, x_{\sigma\tau(2)}, x_{\sigma\tau(3)}, x_{\sigma\tau(4)}) \\ &= g(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}) \\ &= \varepsilon(\tau) f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}) \\ &= \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau) f(x_1, x_2, x_3, x_4). \end{aligned}$$

となるので、$\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$. よって、$\varepsilon$ は群準同型である. また、

$$f(x_2, x_1, x_3, x_4) = (x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_3 - x_4) = -f(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

より、$\varepsilon((1\ 2)) = -1$. よって、$\varepsilon(e) = 1$ と合わせると、ε は全射群準同型. これより準同型定理から、

$$\mathfrak{S}_4/\operatorname{Ker}\varepsilon \simeq \{1, -1\}$$

となるので、$|\mathfrak{S}_4/\operatorname{Ker}\varepsilon| = 2$. $|\mathfrak{S}_4| = |\mathfrak{S}_4/\operatorname{Ker}\varepsilon| \cdot |\operatorname{Ker}\varepsilon|$ と合わせると、

$$|\operatorname{Ker}\varepsilon| = \frac{|\mathfrak{S}_4|}{|\mathfrak{S}_4/\operatorname{Ker}\varepsilon|} = \frac{4!}{2} = 12.$$

□

((3) : ε が準同型写像であることの別解) (2) より各 $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ に対し、$\varepsilon(\sigma) = \displaystyle\prod_{\{i,j\}\in\widetilde{X}} \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_{\sigma(i)\sigma(j)}}$ であるので、任意の 2 元 $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_4$ に対し、

$$\varepsilon(\sigma\tau) = \prod_{\{i,j\}\in\widetilde{X}} \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_{\sigma\tau(i)\sigma\tau(j)}} = \prod_{\{i,j\}\in\widetilde{X}} \frac{\varepsilon_{\tau(i)\tau(j)}}{\varepsilon_{\sigma\tau(i)\sigma\tau(j)}} \prod_{\{i,j\}\in\widetilde{X}} \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_{\tau(i)\tau(j)}} = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau).$$

ここで、最後の等式においては $\widetilde{X} = \{\{\tau(i), \tau(j)\} \mid \{i,j\} \in \widetilde{X}\}$ を用いた．よって、ε は群準同型である． □

(4)

$$f(x_1, x_3, x_2, x_4) = (x_1 - x_3)(x_1 - x_2)(x_1 - x_4)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)(x_2 - x_4) = -f(x_1, x_2, x_3, x_4)$$
$$f(x_1, x_2, x_4, x_3) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_4)(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)(x_2 - x_3)(x_4 - x_3) = -f(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

と (3) の計算より、$\varepsilon((1\ 2)) = \varepsilon((2\ 3)) = \varepsilon((3\ 4)) = -1$．よって、(3) より ε は群準同型であることから、任意の $i, j \in \{1, 2, 3\}$ に対し、

$$\varepsilon((i\ i+1)(j\ j+1)) = \varepsilon((i\ i+1))\varepsilon((j\ j+1)) = (-1) \times (-1) = 1.$$

よって、$\{(i\ i+1)(j\ j+1) \mid i, j \in \{1, 2, 3\}\} \subset \operatorname{Ker}\varepsilon$ なので、$\langle\{(i\ i+1)(j\ j+1) \mid i, j \in \{1, 2, 3\}\}\rangle \subset \operatorname{Ker}\varepsilon$．逆に、任意の $\sigma \in \operatorname{Ker}\varepsilon$ を隣接互換 $(i\ i+1)$, $i \in \{1, 2, 3\}$ の積で

$$\sigma = (i_1\ i_1 + 1) \cdots (i_k\ i_k + 1)$$

と書いたとすると、

$$1 = \varepsilon(\sigma) = \varepsilon((i_1\ i_1 + 1)) \cdots \varepsilon((i_k\ i_k + 1)) = (-1)^k$$

なので、k は偶数．よって、$\sigma \in \langle\{(i\ i+1)(j\ j+1) \mid i, j \in \{1, 2, 3\}\}\rangle$．以上より、$\langle\{(i\ i+1)(j\ j+1) \mid i, j \in \{1, 2, 3\}\}\rangle = \operatorname{Ker}\varepsilon$． □

問題 3

n を 2 以上の整数とする．行列群

$$GL_2(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

の 2 元

$$\sigma := \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & -\sin\frac{2\pi}{n} \\ \sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} \end{pmatrix} \qquad\qquad \tau := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で生成される部分群 $\langle\{\sigma, \tau\}\rangle$ を D_n とおく．このとき、以下の問に答えよ．

(1) 各 $k \in \mathbb{Z}$ に対し、σ^k を具体的な行列の形で表示せよ (答えのみでよい)．

(2) σ、τ の位数を求めよ．ただし、それぞれ計算の過程も説明すること．

(3) D_n の全ての元を具体的な行列の形で表示し、D_n の位数を述べよ (答えのみでよい)．

(4)
$$D_n \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \text{ (行列の積)}$$

は $\mathbb{R}^2$ 上の D_n の作用を定める．このとき、D_n の $v := \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{n} \\ \sin\frac{\pi}{n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ における固定部分群 $(D_n)_v$ の位数、および商集合 $D_n/(D_n)_v$ の元の個数を求めよ．ただし、計算の過程も説明すること．

(5) 群準同型 $\Delta\colon D_n \to \mathbb{R}^\times, g \mapsto \det g$ の核 $\operatorname{Ker}\Delta$ を求めよ．ただし、計算の過程も説明すること．

問題 3 解答例.

(1) $\sigma^k = \begin{pmatrix} \cos\frac{2k\pi}{n} & -\sin\frac{2k\pi}{n} \\ \sin\frac{2k\pi}{n} & \cos\frac{2k\pi}{n} \end{pmatrix}$ □

*************(1) の解法 (実際の試験では書く必要はない)*************

任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し、

$$\sigma^k = \begin{pmatrix} \cos\frac{2k\pi}{n} & -\sin\frac{2k\pi}{n} \\ \sin\frac{2k\pi}{n} & \cos\frac{2k\pi}{n} \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

となることを数学的帰納法で証明する．$k=0$ のとき、$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix}$ より、$(*)$ は成立する．次に、ある $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に関して $(*)$ が成立すると仮定すると、

$$\begin{aligned}
\sigma^{k+1} = \sigma^k\sigma &= \begin{pmatrix} \cos\frac{2k\pi}{n} & -\sin\frac{2k\pi}{n} \\ \sin\frac{2k\pi}{n} & \cos\frac{2k\pi}{n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & -\sin\frac{2\pi}{n} \\ \sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\frac{2k\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n} - \sin\frac{2k\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n} & -\cos\frac{2k\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n} - \sin\frac{2k\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n} \\ \sin\frac{2k\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{2k\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n} & -\sin\frac{2k\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{2k\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\frac{2(k+1)\pi}{n} & -\sin\frac{2(k+1)\pi}{n} \\ \sin\frac{2(k+1)\pi}{n} & \cos\frac{2(k+1)\pi}{n} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

より、k を $k+1$ としても $(*)$ が成立する．以上から任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して、$(*)$ が成立することがわかる．さらに、$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して、

$$\sigma^{-k} = \begin{pmatrix} \cos\frac{2k\pi}{n} & -\sin\frac{2k\pi}{n} \\ \sin\frac{2k\pi}{n} & \cos\frac{2k\pi}{n} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\cos^2\frac{2k\pi}{n} + \sin^2\frac{2k\pi}{n}}\begin{pmatrix} \cos\frac{2k\pi}{n} & \sin\frac{2k\pi}{n} \\ -\sin\frac{2k\pi}{n} & \cos\frac{2k\pi}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{2k\pi}{n}\right) & -\sin\left(-\frac{2k\pi}{n}\right) \\ \sin\left(-\frac{2k\pi}{n}\right) & \cos\left(-\frac{2k\pi}{n}\right) \end{pmatrix}$$

より、k を $-k$ としても $(*)$ は成立する．以上より、任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対し、

$$\sigma^k = \begin{pmatrix} \cos\frac{2k\pi}{n} & -\sin\frac{2k\pi}{n} \\ \sin\frac{2k\pi}{n} & \cos\frac{2k\pi}{n} \end{pmatrix}.$$

□

****

(2) (1) より、

$$\begin{aligned}
\sigma^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \cos\frac{2k\pi}{n} = 1,\ \sin\frac{2k\pi}{n} = 0 \\
&\Leftrightarrow k \in n\mathbb{Z} = \{mn \mid m \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}$$

なので、$\operatorname{ord}\sigma = n$. また、

$$\tau \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \tau^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

より、$\operatorname{ord}\tau = 2$. □

(3) $D_n = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\frac{2k\pi}{n} & (-1)^{1+\ell}\sin\frac{2k\pi}{n} \\ \sin\frac{2k\pi}{n} & (-1)^{\ell}\cos\frac{2k\pi}{n} \end{pmatrix} \middle| k = 0, 1, \ldots, n-1, \ell = 0, 1 \right\}, \quad |D_n| = 2n.$

*************(3) の解法 (実際の試験では書く必要はない)*************

各 $k \in \mathbb{Z}$ に対し、

$$\begin{aligned}
\tau\sigma^k &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{2k\pi}{n} & -\sin\frac{2k\pi}{n} \\ \sin\frac{2k\pi}{n} & \cos\frac{2k\pi}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{2k\pi}{n} & -\sin\frac{2k\pi}{n} \\ -\sin\frac{2k\pi}{n} & -\cos\frac{2k\pi}{n} \end{pmatrix} \\
\sigma^k\tau &= \begin{pmatrix} \cos\frac{2k\pi}{n} & -\sin\frac{2k\pi}{n} \\ \sin\frac{2k\pi}{n} & \cos\frac{2k\pi}{n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{2k\pi}{n} & \sin\frac{2k\pi}{n} \\ \sin\frac{2k\pi}{n} & -\cos\frac{2k\pi}{n} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

より、$\tau\sigma^k = \sigma^{-k}\tau$. この関係式を繰り返し用いると、$D_n$ の一般の元 $\sigma^{k_1}\tau^{\ell_1}\sigma^{k_2}\tau^{\ell_2}\cdots\sigma^{k_s}\tau^{\ell_s}$, $k_1,\ldots,k_s,\ell_1,\ldots,\ell_s \in \mathbb{Z}$ は $\sigma^k\tau^\ell$, $k,\ell \in \mathbb{Z}$ の形に書き換えられる. これにさらに、σ の位数が n、τ の位数が 2 であることを考慮すると、

$$\begin{aligned} D_n &= \{\sigma^k\tau^\ell \mid k=0,1,\ldots,n-1,\ell=0,1\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \cos\frac{2k\pi}{n} & (-1)^{1+\ell}\sin\frac{2k\pi}{n} \\ \sin\frac{2k\pi}{n} & (-1)^\ell\cos\frac{2k\pi}{n} \end{pmatrix} \middle| k=0,1,\ldots,n-1,\ell=0,1 \right\} \end{aligned}$$

となり、その位数は $2n$ である. □

****

(4) (3) より、D_n の一般の元は $\begin{pmatrix} \cos\frac{2k\pi}{n} & (-1)^{1+\ell}\sin\frac{2k\pi}{n} \\ \sin\frac{2k\pi}{n} & (-1)^\ell\cos\frac{2k\pi}{n} \end{pmatrix}$, $k=0,1,\ldots,n-1,\ell=0,1$ と書ける. ここで、

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{2k\pi}{n} & (-1)^{1+\ell}\sin\frac{2k\pi}{n} \\ \sin\frac{2k\pi}{n} & (-1)^\ell\cos\frac{2k\pi}{n} \end{pmatrix} \cdot v = \begin{pmatrix} \cos\frac{2k\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} + (-1)^{1+\ell}\sin\frac{2k\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n} \\ \sin\frac{2k\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} + (-1)^\ell\cos\frac{2k\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{(2k+(-1)^\ell)\pi}{n} \\ \sin\frac{(2k+(-1)^\ell)\pi}{n} \end{pmatrix}$$

これより、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos\frac{2k\pi}{n} & (-1)^{1+\ell}\sin\frac{2k\pi}{n} \\ \sin\frac{2k\pi}{n} & (-1)^\ell\cos\frac{2k\pi}{n} \end{pmatrix} \cdot v = v &\Leftrightarrow \cos\frac{(2k+(-1)^\ell)\pi}{n} = \cos\frac{\pi}{n},\ \sin\frac{(2k+(-1)^\ell)\pi}{n} = \sin\frac{\pi}{n} \\ &\Leftrightarrow 2k+(-1)^\ell \in 1+2n\mathbb{Z} = \{1+2mn \mid m \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

$k=0,1,\ldots,n-1,\ell=0,1$ の範囲で最後の条件を満たすものは、$(k,\ell)=(0,0),(1,1)$ のみであるので、

$$(D_n)_v = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & \sin\frac{2\pi}{n} \\ \sin\frac{2\pi}{n} & -\cos\frac{2\pi}{n} \end{pmatrix} \right\},\ |(D_n)_v| = 2.$$

さらに $|D_n| = |D_n/(D_n)_v| \cdot |(D_n)_v|$ より、

$$|D_n/(D_n)_v| = \frac{|D_n|}{|(D_n)_v|} = \frac{2n}{2} = n.$$

□

(5) (3) より、D_n の一般の元は $\begin{pmatrix} \cos\frac{2k\pi}{n} & (-1)^{1+\ell}\sin\frac{2k\pi}{n} \\ \sin\frac{2k\pi}{n} & (-1)^\ell\cos\frac{2k\pi}{n} \end{pmatrix}$, $k=0,1,\ldots,n-1,\ell=0,1$ と書ける. ここで、

$$\Delta\left(\begin{pmatrix} \cos\frac{2k\pi}{n} & (-1)^{1+\ell}\sin\frac{2k\pi}{n} \\ \sin\frac{2k\pi}{n} & (-1)^\ell\cos\frac{2k\pi}{n} \end{pmatrix}\right) = (-1)^\ell\cos^2\frac{2k\pi}{n} + (-1)^\ell\sin^2\frac{2k\pi}{n} = (-1)^\ell.$$

よって、

$$\Delta\left(\begin{pmatrix} \cos\frac{2k\pi}{n} & (-1)^{1+\ell}\sin\frac{2k\pi}{n} \\ \sin\frac{2k\pi}{n} & (-1)^\ell\cos\frac{2k\pi}{n} \end{pmatrix}\right) = 1 \Leftrightarrow \ell = 0.$$

これより、

$$\mathrm{Ker}\,\Delta = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\frac{2k\pi}{n} & -\sin\frac{2k\pi}{n} \\ \sin\frac{2k\pi}{n} & \cos\frac{2k\pi}{n} \end{pmatrix} \middle| k=0,\ldots,n-1 \right\}.$$

□

問題 4

G を位数 18 の有限群とする.

(1) $\widetilde{X} := \{\{g_1, g_2, g_3\} \subset G \mid g_1, g_2, g_3$は相異なる G の 3 元 $\}$ とする. このとき、$\widetilde{X}$ の元の個数を求めよ (答えのみでよい).

(2)

$$G \times \widetilde{X} \to \widetilde{X}, (g, \{g_1, g_2, g_3\}) \mapsto \{gg_1, gg_2, gg_3\}$$

は $\widetilde{X}$ 上の G の作用を定める. この作用に関する $\{g_1, g_2, g_3\} \in \widetilde{X}$ の元の固定部分群 $G_{\{g_1,g_2,g_3\}}$ の位数は 3 以下であることを証明せよ.

(3) (2) の $\widetilde{X}$ 上の G の作用は元の個数が 6 である軌道を少なくとも 1 つ持つことを証明せよ.

(4) G は位数 3 の部分群を少なくとも 1 つ持つことを証明せよ.

問題 4 解答例.

(1) $|\widetilde{X}| = {}_{18}\mathrm{C}_3 = \dfrac{18 \times 17 \times 16}{3 \times 2 \times 1} = 816.$ □

(2) $G_{\{g_1,g_2,g_3\}} = \{g \in G \mid \{gg_1, gg_2, gg_3\} = \{g_1, g_2, g_3\}\}$ であるので、各 $g \in G_{\{g_1,g_2,g_3\}}$ に対してある $i \in \{1, 2, 3\}$ が定まり、$gg_1 = g_i$ となる. このとき、$g = g_i g_1^{-1}$. よって、

$$G_{\{g_1,g_2,g_3\}} \subset \{g_i g_1^{-1} \mid i = 1, 2, 3\}.$$

よって、$|G_{\{g_1,g_2,g_3\}}| \leq 3.$ □

(3) 各 $\{g_1, g_2, g_3\} \in \widetilde{X}$ に対し、$|G| = |G.\{g_1, g_2, g_3\}| \cdot |G_{\{g_1,g_2,g_3\}}|$ が成立する. 一方 (2) より、$|G_{\{g_1,g_2,g_3\}}| \leq 3$ であり、さらに Lagrange の定理よりこの値は $|G| = 18$ の約数であることから、$1, 2, 3$ のいずれか. これらより軌道 $G.\{g_1, g_2, g_3\}$ の元の個数は、$18, 9, 6$ のいずれか.

ここで元の個数が 6 の軌道が存在しないとすると、$\widetilde{X}$ を軌道分解したときに元の個数が 18 または 9 の軌道で軌道分解されるので、特に $\widetilde{X}$ の元の個数は 9 の倍数となるが、(1) より $\widetilde{X}$ の元の個数は 816 で 9 の倍数ではない. 以上より、$\widetilde{X}$ 上の G の作用は元の個数が 6 である軌道を少なくとも 1 つ持つ.

(4) (3) より元の個数が 6 である G の作用の軌道がとれるので、この軌道に含まれる元を $\{g_1, g_2, g_3\}$ とすると、$|G| = |G.\{g_1, g_2, g_3\}| \cdot |G_{\{g_1,g_2,g_3\}}|$ より、

$$|G_{\{g_1,g_2,g_3\}}| = \frac{|G|}{|G.\{g_1, g_2, g_3\}|} = \frac{18}{6} = 3.$$

よって、$G_{\{g_1,g_2,g_3\}}$ が位数 3 の G の部分群の例としてとれる. □

問題 5

G を位数 15 の有限群とする.

(1) $\widetilde{X} := \{\{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\} \subset G \mid g_1, g_2, g_3, g_4, g_5$は相異なる G の 5 元 $\}$ とする. このとき、$\widetilde{X}$ の元の個数を求めよ (答えのみでよい).

(2)

$$G \times \widetilde{X} \to \widetilde{X}, (g, \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}) \mapsto \{gg_1, gg_2, gg_3, gg_4, gg_5\}$$

は $\widetilde{X}$ 上の G の作用を定める. この作用に関する $\{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\} \in \widetilde{X}$ の元の固定部分群 $G_{\{g_1,g_2,g_3,g_4,g_5\}}$ の位数は 5 以下であることを証明せよ.

(3) (2) の $\widetilde{X}$ 上の G の作用は元の個数が 3 である軌道を少なくとも 1 つ持つことを証明せよ.

(4) G は位数 5 の部分群を少なくとも 1 つ持つことを証明せよ.

(5) G の位数 5 の部分群はただ一つであり、さらに正規部分群であることを証明せよ.

問題 5 解答例.

(1) $|\widetilde{X}| = {}_{15}\mathrm{C}_5 = \dfrac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 3003.$ □

(2) $G_{\{g_1,g_2,g_3,g_4,g_5\}} = \{g \in G \mid \{gg_1, gg_2, gg_3, gg_4, gg_5\} = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}\}$ であるので、各 $g \in G_{\{g_1,g_2,g_3,g_4,g_5\}}$ に対してある $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ が定まり、$gg_1 = g_i$ となる. このとき、$g = g_i g_1^{-1}$. よって、

$$G_{\{g_1,g_2,g_3,g_4,g_5\}} \subset \{g_i g_1^{-1} \mid i = 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

よって、$|G_{\{g_1,g_2,g_3,,g_4,g_5\}}| \leq 5.$ □

(3) 各 $\{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\} \in \widetilde{X}$ に対し、$|G| = |G.\{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}| \cdot |G_{\{g_1,g_2,g_3,g_4,g_5\}}|$ が成立する. 一方 (2) より、$|G_{\{g_1,g_2,g_3,g_4,g_5\}}| \leq 5$ であり、さらに Lagrange の定理よりこの値は $|G| = 15$ の約数であることから、$1, 3, 5$ のいずれか. これらより軌道 $G.\{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}$ の元の個数は、$15, 5, 3$ のいずれか.

ここで元の個数が 3 の軌道が存在しないとすると、$\widetilde{X}$ を軌道分解したときに元の個数が 15 または 5 の軌道で軌道分解されるので、特に $\widetilde{X}$ の元の個数は 5 の倍数となるが、(1) より $\widetilde{X}$ の元の個数は 3003 で 5 の倍数ではない. 以上より、$\widetilde{X}$ 上の G の作用は元の個数が 3 である軌道を少なくとも 1 つ持つ.

(4) (3) より元の個数が 3 である G の作用の軌道がとれるので、この軌道に含まれる元を $\{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}$ とすると、$|G| = |G.\{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}| \cdot |G_{\{g_1,g_2,g_3,g_4,g_5\}}|$ より、

$$|G_{\{g_1,g_2,g_3,g_4,g_5\}}| = \frac{|G|}{|G.\{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}|} = \frac{15}{3} = 5.$$

よって、$G_{\{g_1,g_2,g_3,g_4,g_5\}}$ が位数 5 の G の部分群の例としてとれる.

(5) $H, H' \subset G$ を位数 5 の部分群であるとする. このとき $H = H'$ となることを示せばよい. いま H, H' の位数は素数なので巡回群であり、$e \neq h \in H, e \neq h' \in H'$ とすると、

$$H = \{h^i \mid i = 0, 1, 2, 3, 4\} \qquad H' = \{(h')^j \mid j = 0, 1, 2, 3, 4\}$$

となる. ここで、$h^i (h')^j, i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ は G の 25 個の元であるが、G の位数は 15 なので、ある $i_1, i_2, j_1, j_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, i_1 \neq i_2, j_1 \neq j_2$ が存在して、$h^{i_1}(h')^{j_1} = h^{i_2}(h')^{j_2}$ となる. このとき、$h^{i_1 - i_2} = (h')^{j_2 - j_1} \in H \cap H'$ である. いま $H \cap H'$ は H の部分群であるが、一方 H の位数は素数なので H の部分群は $\{e\}$ か H のいずれか. $H \cap H' = \{e\}$ と仮定すると、$h^{i_1 - i_2} = (h')^{j_2 - j_1} = e$ となるが、$i_1, i_2, j_1, j_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ より、$i_1 \neq i_2, j_1 \neq j_2$ のときこれを満たす i_1, i_2, j_1, j_2 は存在しない. よって、$H \cap H' = H$ であり、特に $H \subset H'$. さらに H と H' の位数はともに 5 であるので、$H = H'$. よって、G の位数 5 の部分群はただ一つである.

さらに H を G の位数 5 の部分群とすると、任意の $g \in G$ に対して、gHg^{-1} も位数 5 の部分群となるが、位数 5 の部分群はただ一つであることより、$gHg^{-1} = H$. よって、H は G の正規部分群である. $\square$

付録：群作用と共役類

定義. 群 G と集合 X に対し、写像

$$f\colon G \times X \to X,\ (g,x) \mapsto f(g,x)$$

が次の 2 条件を満たすとき、これを **X 上の G の作用** (action) という．(記号を簡潔にするため以下では $f(g,x)$ を単に $g.x$ と書く.)

(i) 任意の $g,h \in G$、$x \in X$ に対し、$(gh).x = g.(h.x)$.

(ii) 任意の $x \in X$ に対し、$e.x = x$. ただし、e は G の単位元.

G の作用に関する $x \in X$ **の軌道** (orbit) を

$$G.x := \{g.x \mid g \in G\}$$

と定める．また、$x \in X$ における G の**固定部分群** (stabilizer) を

$$G_x := \{g \in G \mid g.x = x\}$$

と定める．G_x は G の部分群となる．また、記号は似ているが $G.x$ は X の部分集合であり、G_x は G の部分群であることを注意しておく.

例 1. $X := \{1,2,3,4,5\}$ としたとき、

$$\mathfrak{S}_5 \times X \to X, (\sigma, i) \mapsto \sigma.i := \sigma(i)$$

は X 上の $\mathfrak{S}_5$ の作用を定める．例えば、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.1 = 3, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.2 = 1, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.5 = 5$$

などとなる．さらに、

$$\mathfrak{S}_5.1 = \{1,2,3,4,5\} = X, \qquad (\mathfrak{S}_5)_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_5 \,\middle|\, \{i_1, i_2, i_3, i_4\} = \{2,3,4,5\} \right\}$$

となる．ちなみにこれが群作用であることは以下の計算から確かめられる.

<u>(i) の確認</u> 任意の $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_5$、$i \in X$ に対し、$(\sigma\tau).i = \sigma\tau(i) = \sigma(\tau(i)) = \sigma.(\tau.i)$.

<u>(ii) の確認</u> 任意の $i \in X$ に対し、$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.i = i$.

例 2. $X := \mathbb{R}^2$ としたとき、

$$GL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} \ (\text{行列の積})$$

は $\mathbb{R}^2$ 上の $GL_2(\mathbb{R})$ の作用を定める．これが群作用であることは以下の計算から確かめられる.

<u>(i) の確認</u> 任意の $g_1, g_2 \in GL_2(\mathbb{R}), v \in \mathbb{R}^2$ に対し、$(g_1 g_2) \cdot v = g_1 \cdot (g_2 \cdot v)$ (行列の積の結合法則).

<u>(ii) の確認</u> 任意の $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し、$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

例えば、

$$
\begin{aligned}
GL_2(\mathbb{R}).\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} &= \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\},\\
GL_2(\mathbb{R}).\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} &= \left\{\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in GL_2(\mathbb{R})\right\} = \mathbb{R}^2\setminus\{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\},\\
GL_2(\mathbb{R})_{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)} &= \left\{\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & d\end{pmatrix}\in GL_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, d\neq 0\right\}
\end{aligned}
$$

となる.

定義. G を群、X を集合とし、

$$G\times X\to X,\ (g,x)\mapsto g.x$$

を X 上の G の作用とする. このとき、X は G の作用に関する軌道の和に分割される. つまり、

$$X=\coprod_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$$

ただし、各 O_λ は軌道、Λ は各軌道を添え字付ける適当な添え字集合、という形に書ける. $\lambda\neq\lambda'$ であれば $O_\lambda\cap O_{\lambda'}=\emptyset$ である. これを**軌道分解**という.
G の作用を用いて X 上の同値関係 $\sim$ を

$$x\sim y \iff \text{ある } g\in G \text{ が存在して、} x=g.y$$

で定めることができることを思い出すと、各軌道 O_λ は同値関係 $\sim$ に関する同値類とちょうど対応し、軌道分解できることは同値関係の一般論から従う.

例 3. 例 1 では、軌道分解は

$$X=\mathfrak{S}_5.1$$

であった. つまり、このとき X は 1 つの軌道に分解されていた. 例 2 では、軌道分解は

$$\mathbb{R}^2=\{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\}\coprod\left(\mathbb{R}^2\setminus\{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\}\right)=GL_2(\mathbb{R}).\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\coprod GL_2(\mathbb{R}).\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

であった. 特に、このとき $\mathbb{R}^2$ は 2 つの軌道に分解されていた.

群の軌道の構造については次の定理が基本的である.

定理

G を群、X を集合とし、

$$G\times X\to X,\ (g,x)\mapsto g.x$$

を X 上の G の作用とする. このとき、任意の $x\in X$ に対し、

$$G/G_x\to G.x,\ gG_x\mapsto g.x$$

は<u>集合としての</u>全単射である. 特に G が有限群のとき、

$$\frac{|G|}{|G_x|}=|G/G_x|=|G.x|$$

である. (これは G の G_x における指数に他ならない.)

例 4. 確かに例 1 では、

$$\frac{|\mathfrak{S}_5|}{|(\mathfrak{S}_5)_1|} = \frac{5!}{4!} = 5, \qquad |\mathfrak{S}_5.1| = |X| = 5$$

であった.

定義. G を群としたとき、

$$G \times G \to G, (g, h) \mapsto g.h := ghg^{-1}$$

は G 上の G の作用を定める. これが群作用であることは以下の計算から確かめられる.

(i) の確認 任意の $g_1, g_2, h \in G$ に対し、

$$(g_1g_2).h = g_1g_2h(g_1g_2)^{-1} = g_1(g_2hg_2^{-1})g_1^{-1} = g_1.(g_2.h).$$

(ii) の確認 任意の $h \in G$ に対し、$e.h = ehe^{-1} = h.$

この群作用に関する軌道は特に**共役類**と呼ばれる. 各 $g \in G$ に対し、g を含む共役類 $K(g)$ は具体的には、

$$K(g) = \{hgh^{-1} \mid h \in G\}$$

である. なおある $h \in G$ が存在して、$g_1 = hg_2h^{-1}$ となるとき (つまり、$g_1 \in K(g_2)$ のとき)、g_1 **と** g_2 **は共役である**という.
群作用の軌道分解の一般論から、群 G は共役類の和集合の形に分割されることがわかる.

例 5. 3 次対称群 $\mathfrak{S}_3$ の共役類は、$\{e\}$、$\{(1\ 2), (2\ 3), (1\ 3)\}$、$\{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ で全てである. つまり、

$$\mathfrak{S}_3 = \{e\} \coprod \{(1\ 2), (2\ 3), (1\ 3)\} \coprod \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

は $\mathfrak{S}_3$ の共役類への分割である. 定義通り確認してみよ. (例えば、任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ に対して、$\sigma e \sigma^{-1} = e$、$(1\ 2\ 3)(1\ 2)(1\ 2\ 3)^{-1} = (2\ 3)$, etc.)