代数学 I 中間テスト

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)

- 試験時間は 85 分である.
- 解答は日本語または英語で行うこと. また、どの問の解答であるかを明確に記したうえで解答用紙には解答すること.
- 名前、学籍番号の書き忘れには十分注意すること.

問題 1.

(1) 空でない集合 G が群であることの定義を述べよ.

(2) 群 G の部分群とは何か. その定義を述べよ.

(3) 群 G、G' の間の写像 $f\colon G \to G'$ が群準同型写像であることの定義を述べよ.

問題 2. 行列群

$$GL_2(\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbb{C}, ad-bc \neq 0 \right\}$$

を考える. 次の空でない部分集合 G_1、G_2、G_3 が、それぞれ $GL_2(\mathbb{C})$ の

(a) 正規部分群をなす　　(b) 部分群をなすが正規部分群ではない　　(c) 部分群をなさない

のどれになるかを選び、その理由を説明せよ.

(1) $G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbb{C}, ad-bc \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \right\}$.　(2) $G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbb{C}, ad-bc = 1 \right\}$.

(3) $G_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbb{Z}, ad-bc = 1 \right\}$.

なお、行列式 $\det\colon GL_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^\times, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad-bc$ が群準同型であることは証明なしに用いてよい.

問題 3. n 次対称群を $\mathfrak{S}_n$ と書く. 以下の問に答えよ.

(1) $\mathfrak{S}_5$ の元の積 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ を再び $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$ の形で表せ (答えのみでよい).

(2) $\mathfrak{S}_6$ における $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ と $(3\ 1\ 4\ 2\ 6)$ の逆元をそれぞれ求めよ (答えのみでよい. 元の表示の方法は授業中に提示したもののうち、あみだくじ以外であれば何でもよい).

(3) $\mathfrak{S}_7$ の元 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 6 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ をどの 2 つも互いに素な巡回置換の積として表せ. また、$\mathfrak{S}_7$ における巡回置換の積 $(1\ 2\ 3)(2\ 3\ 6)$ を $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \end{pmatrix}$ の形で表せ (共に答えのみでよい).

(4)

$$\mathfrak{S}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

の各元の位数を求めよ (答えのみでよい). また、$\mathfrak{S}_3$ の位数 3 の部分巡回群は正規部分群であることを証明せよ.

(5) $\mathfrak{S}_3$ と同型でない位数 6 の群の例を挙げ、同型でない理由を説明せよ.

問題 4. n 次 2 面体群を

$$D_n = \{e, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{n-1}, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \ldots, \sigma^{n-1}\tau\}$$

と書く．ここで、σ は正 n 角形の中心に関する反時計回り $2\pi/n$ 回転、τ は正 n 角形のある固定した対称軸に関する折り返し変換を表す．以下の問に答えよ．

(1) n を 3 以上の整数、k、$\ell \in \{0, 1 \ldots, n-1\}$ とする．このとき、以下の D_n の元 (a)、(b)、(c)、(d) を再び $\sigma^{m'}$、あるいは $\sigma^{m'}\tau$ $(m' \in \mathbb{Z})$ の形で表せ (答えのみでよい)．

(a) $\sigma^k(\sigma^\ell)(\sigma^k)^{-1}$　(b) $\sigma^k(\sigma^\ell\tau)(\sigma^k)^{-1}$　(c) $(\sigma^k\tau)(\sigma^\ell)(\sigma^k\tau)^{-1}$　(d) $(\sigma^k\tau)(\sigma^\ell\tau)(\sigma^k\tau)^{-1}$.

ここで、$\sigma^n = e$、$\tau^2 = e$、$\sigma\tau = \tau\sigma^{-1}$ であったことに注意する．

(2) D_4 の中心 $Z(D_4)$ を求めよ (答えのみでよい)．

(3) D_5 の部分群を全て求めよ (答えのみでよい)．

問題は以上である．