# 代数学 I 中間テスト問題 4 解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

**問題 4**

$n$ 次 2 面体群を

$$D_n = \{e, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{n-1}, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \dots, \sigma^{n-1}\tau\}$$

と書く．ここで、$\sigma$ は正 $n$ 角形の中心に関する反時計回り $2\pi/n$ 回転、$\tau$ は正 $n$ 角形のある固定した対称軸に関する折り返し変換を表す．以下の問に答えよ．

(1) $n$ を 3 以上の整数、$k$、$\ell \in \{0, 1 \dots, n-1\}$ とする．このとき、以下の $D_n$ の元 (a)、(b)、(c)、(d) を再び $\sigma^{m'}$、あるいは $\sigma^{m'}\tau$ ($m' \in \mathbb{Z}$) の形で表せ (答えのみでよい).

(a) $\sigma^k(\sigma^\ell)(\sigma^k)^{-1}$ (b) $\sigma^k(\sigma^\ell\tau)(\sigma^k)^{-1}$ (c) $(\sigma^k\tau)(\sigma^\ell)(\sigma^k\tau)^{-1}$ (d) $(\sigma^k\tau)(\sigma^\ell\tau)(\sigma^k\tau)^{-1}$.

ここで、$\sigma^n = e$、$\tau^2 = e$、$\sigma\tau = \tau\sigma^{-1}$ であったことに注意する．

(2) $D_4$ の中心 $Z(D_4)$ を求めよ (答えのみでよい).

(3) $D_5$ の部分群を全て求めよ (答えのみでよい).

**問題 4 解答例.**

(1)

(a) $\sigma^\ell$ (b) $\sigma^{\ell+2k}\tau$ (c) $\sigma^{-\ell}$ (d) $\sigma^{2k-\ell}\tau$.

□

(2) $\{e, \sigma^2\}$. □

(3) $\{e\}$、$\{e, \tau\}$、$\{e, \sigma\tau\}$、$\{e, \sigma^2\tau\}$、$\{e, \sigma^3\tau\}$、$\{e, \sigma^4\tau\}$、$\{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4\}$、$D_5$. □

**問題 4(1) 補足解説.** $\sigma\tau = \tau\sigma^{-1}$ の両辺に左から $\sigma^{-1}$、右から $\sigma$ をかけて $\tau\sigma = \sigma^{-1}\tau$ も成立するので、これらを繰り返し用いると、任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$\tau\sigma^k = \sigma^{-k}\tau$$

が成立する．これを用いれば後は計算を行うだけである． □

**問題 4(2) 補足解説.** 一般に $D_n (n \geq 3)$ の中心 $Z(D_n)$ を求めるということは任意の $k \in \{0, 1 \dots, n-1\}$ に対し、

$$\sigma^k g(\sigma^k)^{-1} = g \qquad (\sigma^k\tau)g(\sigma^k\tau)^{-1} = g$$

なる $g \in D_n$ を求めることである．(1) (b) での計算より、$\sigma^\ell\tau$ の形の元でこれを満たすものは存在しない ($n \geq 3$ のとき、$\sigma^\ell\tau \neq \sigma^{\ell+2}\tau$)．よって、$\sigma^\ell$ の形の元から中心となるものを探すと (1) (a)、(c) での計算より、

* Department of Mathematical Sciences, Shibaura Institute of Technology, 307 Fukasaku, Minuma-ku, Saitama-shi, Saitama, 337-8570, JAPAN *e-mail* : hoya@shibaura-it.ac.jp

$\sigma^\ell = \sigma^{-\ell}$ なるものが存在すればこれが中心となる．この式は $\sigma^{2\ell} = e$ と同値なので、$\ell \in \{0, \ldots, n-1\}$ とすると、これは $[2\ell = 0$ または $n]$ と同値である．よって、一般に $D_n (n \geq 3)$ の中心 $Z(D_n)$ は、

$$Z(D_n) = \begin{cases} \{e\} & n \text{ が奇数のとき、} \\ \{e, \sigma^{n/2}\} & n \text{ が偶数のとき.} \end{cases}$$

となることがわかる． □

**問題 4(3) 補足解説.** まず、以下の主張を考える：

**主張.** 部分群 $H \subset D_5$ が、ある一つの $k \in \{1,2,3,4\}$ に対し $\sigma^k \in H$ を満たせば、$\{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4\} \subset H$ である．

これは各 $\sigma^k \in \{1,2,3,4\}$ に対し、$\langle \sigma^k \rangle = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4\}$ であることが容易に確かめられるので正しいことがわかる．ただし、ここでは 5 が素数であることが本質的であることに注意する．

主張より、部分群 $H \subset D_5$ が、ある $k \in \{1,2,3,4\}$、$\ell \in \{0,1,2,3,4\}$ に対し $\sigma^k$、$\sigma^\ell \tau \in H$ を満たせば、$H$ は $\sigma$、$\tau$ をともに含むことがわかり、$H = D_5$ であることがわかる．これより、$\{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4\}$、$D_5$ 以外の部分群は $\sigma^k$、$k \in \{1,2,3,4\}$ を含まないことがわかる．

以下、$\sigma^k$、$k \in \{1,2,3,4\}$ を含まない部分群を考える．まず $\sigma^\ell \tau$ の形の元を考えると、

$$(\sigma^\ell \tau)(\sigma^\ell \tau) = e$$

となるので、$(\sigma^\ell \tau)^{-1} = \sigma^\ell \tau$ であり (これは任意の $D_n, n \geq 3$ で正しい)、$\{e, \sigma^\ell \tau\}$、$\ell \in \{0,1,2,3,4\}$ は部分群である．さらに、部分群 $H$ がある $\ell \neq \ell'$ に対し、$\sigma^\ell \tau$、$\sigma^{\ell'} \tau \in H$ を満たすとき、

$$H \ni (\sigma^\ell \tau)(\sigma^{\ell'} \tau) = \sigma^{\ell - \ell'}$$

なので、これは $\sigma^k$、$k \in \{1,2,3,4\}$ を含む部分群となる．よって、$\sigma^k$、$k \in \{1,2,3,4\}$ を含まない部分群が含みうる $\sigma^\ell \tau$ の形の元は高々 1 つであり、そういった部分群は $\{e\}$、$\{e, \sigma^\ell \tau\}$ で尽くされる．以上から、$D_5$ の部分群は、

$$\{e\}、\{e, \tau\}、\{e, \sigma\tau\}、\{e, \sigma^2\tau\}、\{e, \sigma^3\tau\}、\{e, \sigma^4\tau\}、\{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4\}、D_5$$

で全てである． □