代数学 I 中間テスト予告問題 + 解答例 (完全版)

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*†

- 代数学 I の成績は中間試験 40 %、期末試験 60 %の配分で付けられる．出席等は考慮されない．
- 問題 1 は必ず出題される．その他、問題 2–4 のうち 1 問、問題 5–6 のうち 1 問が出題される．
- 予告問題はこれで全てであるが、予告問題以外も出題されるので注意すること．試験範囲は第 6 回の授業で進んだ範囲までである．
- 問題 3 の (3) は第 5 回授業中に配布したものから変更されているので注意すること．

問題 1

(1) 空でない集合 G が群であることの定義を述べよ．
(2) 群 G の部分群とは何か．その定義を述べよ．
(3) 群 G、G' の間の写像 $f\colon G \to G'$ が群準同型写像であることの定義を述べよ．

問題 1 解答例.
(1) 2 項演算 $G \times G \to G, (g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$ が定まっており、以下の 3 条件を満たすこと：

(I) 任意の g_1、g_2、$g_3 \in G$ に対して、$(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$ が成り立つ．
(II) ある $e \in G$ が存在して、任意の $g \in G$ に対し、$e \cdot g = g = g \cdot e$ が成り立つ．
(III) 任意の $g \in G$ に対して、ある $g' \in G$ が存在し、$g' \cdot g = e = g \cdot g'$ が成り立つ． □

(2) 群 G の空でない部分集合であって、G の 2 項演算によって群をなすもの． □
(3) 任意の g_1、$g_2 \in G$ に対し、$f(g_1 \cdot g_2) = f(g_1) \cdot f(g_2)$ が成立すること． □

問題 1(1) 補足解説. (1) のポイントは、

「2 項演算の存在を明記すること」＋ (I)、(II)、(III) の 3 性質が正確に述べられること

である．(I)—(III) の性質は「任意の」と「ある」が混在して出てくるので意味をよく考え、正確に記述することが重要である．また、(II) や (III) にある等式を「$g = g \cdot e$」のみ、「$g' \cdot g = e$」のみというようにさぼってはいけない．例えば授業で紹介した例であるが、2×2 行列のなす集合

$$G' := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{C}^{\times}, b \in \mathbb{C} \right\}$$

を考える．すると、

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & 0 \\ ba' & 0 \end{pmatrix}$$

より、G' には行列の積から定まる 2 項演算が定まっている (結合法則 (I) を満たす)．

---

* Department of Mathematical Sciences, Shibaura Institute of Technology, 307 Fukasaku, Minuma-ku, Saitama-shi, Saitama, 337-8570, JAPAN *e-mail*: hoya@shibaura-it.ac.jp
† 問題および解答例のアップロードが 19 日予定から 20 日にずれてしまったことをお詫び申し上げます．

さらに、$e := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in G'$ と定めると、任意の $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \in G'$ に対し、

$$ge = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = g$$

が成立する．さらに、任意の $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \in G'$ に対し、$g' = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in G'$ とすると、

$$g'g = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e$$

となる．これより、G' は群の性質のうち 2 項演算の存在、(I)、(II) の一部 (「$g = g \cdot e$」のみ)、(III) の一部 (「$g' \cdot g = e$」のみ) を満たすものとなっているが、$\underline{G' \text{ は群ではない}}$．なぜなら、$G'$ が群であるなら任意の $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \in G'$ に対し、$e'g = g$ を満たす $e' = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ e_2 & 0 \end{pmatrix} \in G'$ が存在するはずであり、

$$e'g = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ e_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1a & 0 \\ e_2a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = g$$

より、特に $e_2a = b$ が任意の $a \in \mathbb{C}^\times$、$b \in \mathbb{C}$ に対して成り立つことになるが、そのような定数 e_2 は存在しないためである．

□

問題 1(2) 補足解説. (2) のポイントは、

$$\underline{G \text{ の 2 項演算によって}}$$

を忘れないことである．例えば、$\mathbb{C}^\times$ は掛け算という 2 項演算によって群をなし、$\mathbb{C}$ は足し算という 2 項演算によって群をなす．ここで$\underline{\text{集合としては } \mathbb{C}^\times \subset \mathbb{C} \text{ となるが、} \mathbb{C}^\times \text{ は } \mathbb{C} \text{ の 2 項演算とは言わない.}}$ これは、$\mathbb{C}^\times$ と $\mathbb{C}$ では考えている 2 項演算が異なるためである． □

問題 2

行列群

$$GL_2(\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

を考える．次の空でない部分集合 G_1、G_2、G_3 が、それぞれ $GL_2(\mathbb{C})$ の

(a) 正規部分群をなす　(b) 部分群をなすが正規部分群ではない　(c) 部分群をなさない

のどれになるかを選び、その理由を説明せよ．

(1) $G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$.　(2) $G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1 \right\}$.

(3) $G_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$.

なお、行列式 $\det\colon GL_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^\times, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc$ が群準同型であることは証明なしに用いてよい．

問題 2–4 に必要な前提知識 (ここにあることは証明無しに用いてよい)

- (逆行列の一般形) 行列式 $ad-bc$ が 0 でない 2×2 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し、その逆行列は
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
である.
- (行列式 det が一般線型群から乗法群への群準同型であること)　2×2 行列 g、g' に対し、
$$\det(gg') = \det(g)\det(g')$$
である. 特に、$\det(g)\neq 0$ のとき、$\det(g^{-1}) = \det(g)^{-1}$. ここで、$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad-bc$ である.

問題 2 解答例.

(1) (c) 部分群をなさない.

理由：部分群であるためには任意の G_1 の元に対して、その逆行列も再び G_1 に入っている必要がある. しかし、例えば $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_1$ に対し、その逆行列 $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は $(1/2)\times 1 - 0\times 0 = 1/2 \notin \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ より、G_1 の元でないため. □

(2) (a) 正規部分群をなす.

理由：任意の f、$g\in G_2$ に対し、
$$\det(fg) = \det(f)\det(g) = 1\times 1 = 1 \qquad \det(f^{-1}) = \det(f)^{-1} = 1^{-1} = 1$$
より、$fg\in G_2$ かつ $f^{-1}\in G_2$ である. よって、G_2 は $GL_2(\mathbb{C})$ の部分群である. さらに、任意の $k\in GL_2(\mathbb{C})$、$g\in G_2$ に対し、
$$\det(kgk^{-1}) = \det(k)\det(g)\det(k^{-1}) = \det(k)\det(g)\det(k)^{-1} = \det(g) = 1$$
なので、$kgk^{-1}\in G_2$ である. よって、G_2 は $GL_2(\mathbb{C})$ の正規部分群をなす. □

(別解) 理由：行列式 $\det\colon GL_2(\mathbb{C})\to\mathbb{C}^\times$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\mapsto ad-bc$ は群準同型なので、$\mathrm{Ker}(\det) = G_2$ は正規部分群で a あるが、核の定義より $\mathrm{Ker}(\det) = G_2$ なので、G_2 は正規部分群をなす. □

(3) (b) 部分群をなすが正規部分群ではない.

理由：任意の f、$g\in G_3$ に対し、$f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$、$g = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ とすると、
$$fg = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$$
より fg の各成分も整数であり、$\det(fg) = \det(f)\det(g) = 1\times 1 = 1$ である. よって、$fg\in G_3$. さらに、
$$f^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
より f^{-1} の各成分も整数であり、さらに $\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1} = 1^{-1} = 1$ である. よって、$f^{-1}\in G_3$. 以上より、G_3 は $GL_2(\mathbb{C})$ の部分群である.

一方、例えば $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_3$ に対し、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin G_3\end{aligned}$$

となる．よって、G_3 は正規部分群をなさない． □

問題 2(1) 補足解説. 部分集合 G_1 は行列の積では閉じていて、単位元も含んでいるので逆元を取る操作で閉じていないことを指摘することになる．$g \in GL_2(\mathbb{C})$ に対し、$\det(g^{-1}) = \dfrac{1}{\det(g)}$ なので、逆行列をとるという操作で集合が閉じるためには、とくに各 $f \in G_2$ に対して、$\det(f)^{-1}$ を行列式に持つような行列を G_1 が含んでいる必要がある．しかし、$\det(f)$ が 1 でない $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ の元である場合、$\det(f)^{-1}$ は整数にはならないので ($\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ は積に関して群をなさない)、そのような f を持ってくれば解答例のように逆元が G_1 に入らない例を構成できる． □

問題 2(2) 補足解説. 空でない G の部分集合 H が G の部分群であることの必要十分条件は、

$$\underline{\text{任意の } f\text{、}g \in H \text{ に対し、} fg \in H \text{ かつ } f^{-1} \in H \text{ となること}}$$

であったので、これを示せば部分群であることが言える．さらに、部分群 H が正規であることの定義は、

$$\underline{\text{任意の } h \in H\text{、}g \in G \text{ に対し、} ghg^{-1} \in H \text{ であること}}$$

であったのでこれを言えば正規であることが言える．

部分群 G_2 は**特殊線型群** (special linear group) と呼ばれ、$SL_2(\mathbb{C})$ と普通書かれるものである．これは群準同型である行列式 det の核であり、正規部分群である． □

問題 2(3) 補足解説. 部分群 G_3 は $SL_2(\mathbb{C})$ とよく似ているが各成分が整数であり、この性質も積や逆元を取る操作で閉じていることをちゃんと確認する必要がある．G_3 は $SL_2(\mathbb{Z})$ と書かれる群である．実はこの群は

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

のたった 2 元で生成されることが知られている．一方、これは $GL_2(\mathbb{C})$ における正規部分群ではない．解答例でも用いているが、以下の事実は頭に入れておくと反例の構成に便利である (証明は行列の積の定義から明らかである)：

> $t \in \mathbb{C}^\times$ に対し、$n \times n$ 行列 $D_i(t)$ を (i,i) 成分のみ t で残りの対角成分が 1 であるような対角行列
>
> $$D_i(t) := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \huge{0} \\ & & t & & \\ & & & \ddots & \\ \huge{0} & & & & 1 \end{pmatrix}$$
>
> とする．(これはここだけの記号.) このとき、$D_i(t)^{-1} = D_i(t^{-1})$ であり、任意の $n \times n$ 行列 g に対し、$D_i(t)gD_i(t)^{-1}$ は、g の i 行目を t 倍、i 列目を t^{-1} 倍した行列となる．

解答例ではこの事実を 2×2 行列の $D_1(1/2)$ に対して用いて、1 行目を 1/2 倍させることで、整数でない成分を作り出している． □

問題 3

行列群

$$GL_2(\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

を考える．次の空でない部分集合 G_1、G_2、G_3 が、それぞれ $GL_2(\mathbb{C})$ の

(a) 正規部分群をなす　(b) 部分群をなすが正規部分群ではない　(c) 部分群をなさない

のどれになるかを選び、その理由を説明せよ．

(1) $G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} e^{\frac{2m\pi i}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2m\pi i}{n}} \end{pmatrix} \middle| m = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}$.　(2) $G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| a, b, d \in \mathbb{C}, ad \neq 0 \right\}$.

(3) $G_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad \neq 0, bc = 0 \right\}$.

問題 3 解答例.

(1) (a) 正規部分群をなす．

理由：各 m、$m' \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対し、

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{2m\pi i}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2m\pi i}{n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{2m'\pi i}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2m'\pi i}{n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{2(m+m')\pi i}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2(m+m')\pi i}{n}} \end{pmatrix}$$

であるが、もし $m+m' \geq n$ の場合も $e^{2\pi i} = 1$ より、$e^{\frac{2(m+m')\pi i}{n}} = e^{\frac{2(m+m'-n)\pi i}{n}}$ $(m+m'-n \in \{0, \ldots, n-1\})$ なので、上の積の式の右辺は常に G_1 の元である．また、各 $m \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対し、$e^{2\pi i} = 1$ より、

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{2m\pi i}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2m\pi i}{n}} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{2m\pi i}{n}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2m\pi i}{n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{2(n-m)\pi i}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2(n-m)\pi i}{n}} \end{pmatrix}$$

となるので、$n - m \in \{0, \ldots, n-1\}$ よりこれは再び G_1 の元となる．これらより、G_1 は $GL_2(\mathbb{C})$ の部分群である．次に任意の $g \in GL_2(\mathbb{C})$、$m \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対し、G_1 の各元が単位行列の定数倍であることに注意すると

$$g \begin{pmatrix} e^{\frac{2m\pi i}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2m\pi i}{n}} \end{pmatrix} g^{-1} = e^{\frac{2m\pi i}{n}} \cdot (gg^{-1}) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2m\pi i}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2m\pi i}{n}} \end{pmatrix} \in G_1$$

である．よって、G_1 は $GL_2(\mathbb{C})$ の正規部分群をなす．　□

(2) (b) 部分群をなすが正規部分群ではない．

理由：任意の f、$g \in G_2$ に対し、$f = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$、$g = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}$ とすると、

$$fg = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab' + bd' \\ 0 & dd' \end{pmatrix}$$

であり、$(aa')(dd') = (ad)(a'd') \neq 0$ なので、$fg \in G_2$．さらに、$f^{-1} = \dfrac{1}{ad} \begin{pmatrix} d & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ より、$f^{-1} \in G_2$．以上より、G_2 は $GL_2(\mathbb{C})$ の部分群である．

一方、例えば $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_2$ に対し、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \notin G_2$$

となる．よって、G_2 は正規部分群をなさない．　□

(3) (c) 部分群をなさない.

理由：部分群であるためには任意の f、$g \in G_3$ の元に対して、$fg \in G_3$ である必要がある．しかし、例えば $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in G_3$ に対し、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

となり、これは $1 \times 1 \neq 0$ より、G_3 の元でないため. □

問題 3(1) 補足解説. G_1 は無限非可換群 $GL_2(\mathbb{C})$ の有限正規部分群 (位数は n) である．さらに、$GL_2(\mathbb{C})$ の中心

$$Z(GL_2(\mathbb{C})) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{C}^{\times} \right\}$$

の部分群であり、$GL_2(\mathbb{C})$ の任意の元と可換である．一般に群 G の中心 $Z(G)$ の部分群は全て正規部分群である (証明は解答例と同様の方法でできる). □

問題 3(2) 補足解説. G_2 は**上三角行列**のなす部分群と呼ばれる．これは解答例にあるように、下三角行列で挟むと上三角ではなくなってしまい、正規部分群にはならない. □

問題 3(3) 補足解説. G_3 の条件 $bc = 0$ は「$b = 0$ または $c = 0$」と同値なので、

$$G_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| a, b, d \in \mathbb{C}, ad \neq 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, c, d \in \mathbb{C}, ad \neq 0 \right\}$$

である．右辺の 2 つに分けた集合のそれぞれは問題 3(2) で見たように部分群になるが、和集合は部分群ではない．この部分集合は単位元を含んでいて、逆元をとるという操作では閉じているので、行列の積で閉じないことを指摘することになる.

なお、授業でやったように部分群の共通部分は再び部分群になることに注意する. □

問題 4

行列群

$$GL_2(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

を考える．次の空でない部分集合 G_1、G_2、G_3 が、それぞれ $GL_2(\mathbb{R})$ の

(a) 正規部分群をなす　(b) 部分群をなすが正規部分群ではない　(c) 部分群をなさない

のどれになるかを選び、その理由を説明せよ.

(1) $G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc > 0 \right\}$.　(2) $G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \geq 1 \right\}$.

(3) $G_3 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle| 0 \leq \theta < 2\pi \right\}$.

なお、行列式 $\det \colon GL_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\times}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc$ が群準同型であることは証明なしに用いてよい.

問題 4 解答例.

(1) (a) 正規部分群をなす.

理由：任意の f、$g \in G_1$ に対し、

$$\det(fg) = \det(f)\det(g) > 0 \qquad\qquad \det(f^{-1}) = \det(f)^{-1} > 0$$

より、$fg \in G_1$ かつ $f^{-1} \in G_1$ である．よって、G_1 は $GL_2(\mathbb{R})$ の部分群である．さらに、任意の $k \in GL_2(\mathbb{R})$、$g \in G_1$ に対し、

$$\det(kgk^{-1}) = \det(k)\det(g)\det(k^{-1}) = \det(k)\det(g)\det(k)^{-1} = \det(g) > 0$$

なので、$kgk^{-1} \in G_1$ である．よって、G_1 は $GL_2(\mathbb{R})$ の正規部分群をなす． □

(2) (c) 部分群をなさない．

理由：部分群であるためには任意の G_2 の元に対して、その逆行列も再び G_2 に入っている必要がある．しかし、例えば $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_2$ に対し、その逆行列 $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は $(1/2) \times 1 - 0 \times 0 = 1/2 < 1$ より、G_2 の元でないため． □

(3) (b) 部分群をなすが正規部分群ではない．

理由：各 $0 \leq \theta$、$\theta' < 2\pi$ に対し、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' & -\cos\theta\sin\theta' - \sin\theta\cos\theta' \\ \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' & -\sin\theta\sin\theta' + \cos\theta\cos\theta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である (最後の等式は三角関数の加法定理より従う)．もし $\theta + \theta' \geq 2\pi$ の場合も $\cos(\theta+\theta') = \cos(\theta+\theta' - frm{-}epi)$、$\sin(\theta+\theta') = \sin(\theta+\theta' - frm{-}epi)$ $(0 \leq \theta+\theta' - frm{-}epi < 2\pi)$ なので、上の積の式の最後の行列は常に G_3 の元である．また、各 $0 \leq \theta < 2\pi$ に対し、$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$、$\cos\theta = \cos(-\theta) = \cos(2\pi - \theta)$、$\sin\theta = -\sin(-\theta) = \sin(2\pi - \theta)$ より、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2\pi-\theta) & -\sin(2\pi-\theta) \\ \sin(2\pi-\theta) & \cos(2\pi-\theta) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となるので、これは再び G_3 の元となる．これらより、G_3 は $GL_2(\mathbb{C})$ の部分群である．

一方、例えば $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \in G_3$ $(\theta = \pi/4)$ に対し、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1/2\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となり、$(1,2)$ 成分と $(2,1)$ 成分が -1 倍の関係ではないため、特にこれは G_3 の元ではない．よって、G_3 は正規部分群をなさない． □

問題 4(1) 補足解説． 本問は問題 2、3 とは違い、$GL_2(\mathbb{R})$ の部分集合を考えていることに注意する．本問の G_1 は $GL_2(\mathbb{R})$ の正規部分群であるが、$GL_2(\mathbb{C})$ の正規部分群ではない．(例えば問題 2(3) の補足解説にある方法で $D_1(i)$ を左から、$D_1(-i)$ を右からかけることで、1 行目を i 倍、1 列目を $-i$ 倍することができ、そうすると行列式の条件は保ったまま実数でない成分を持つ行列になる．) □

問題 4(2) 補足解説． 部分集合 G_2 は行列の積では閉じていて、単位元も含んでいるので逆元をとる操作で閉じていないことを指摘することになる．考え方は問題 2(1) と同じである． □

問題 4(3) 補足解説. この部分群 G_3 は**回転群**、あるいは**特殊直交群**と呼ばれ、$SO_2(\mathbb{R})$ と書かれる．ちなみに、2 以上の整数 n に対して、

$$SO_n(\mathbb{R}) := \{g \in GL_n(\mathbb{R}) \mid g^T g = I_n \det g = 1\}$$

と定義される．ただし、g^T は g の転置、I_n は n 次単位行列である．($n = 2$ のときこの定義と G_3 の定義が一致していることを確かめよ．) これは正規部分群ではない $GL_n(\mathbb{R})$ の部分群である． □

問題 5

n 次対称群を $\mathfrak{S}_n$ と書く．以下の問に答えよ．

(1) $\mathfrak{S}_5$ の元の積 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ を再び $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$ の形で表せ (答えのみでよい).

(2) $\mathfrak{S}_6$ における $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ と $(1\ 2\ 4\ 5)$ の逆元をそれぞれ求めよ (答えのみでよい．元の表示の方法は授業中に提示したもののうち、あみだくじ以外であれば何でもよい).

(3) $\mathfrak{S}_7$ の元 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ をどの 2 つも互いに素な巡回置換の積として表せ．また、$\underline{\mathfrak{S}_7\text{ における}}$巡回置換の積 $(4\ 2\ 5)(3\ 6\ 2)$ を $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \end{pmatrix}$ の形で表せ (共に答えのみでよい).

(4)

$$\mathfrak{S}_3 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

の各元の位数を求めよ (答えのみでよい)．また、$\mathfrak{S}_3$ の位数 3 の部分巡回群は正規部分群であることを証明せよ．

(5) $\mathfrak{S}_3$ と同型<u>でない</u>位数 6 の群の例を挙げ、同型でない理由を説明せよ．

問題 5 解答例.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. □

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. $(1\ 2\ 4\ 5)^{-1} = (5\ 4\ 2\ 1)$. □

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 4\ 5)(3\ 7\ 6)$. $(4\ 2\ 5)(3\ 6\ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

(4)

$$\operatorname{ord}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 1 \qquad \operatorname{ord}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2 \qquad \operatorname{ord}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 2$$
$$\operatorname{ord}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 3 \qquad \operatorname{ord}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \qquad \operatorname{ord}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

位数の考察より、$\mathfrak{S}_3$ の位数 3 の部分巡回群は $A := \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right\}$ のみである．

これが正規部分群であることを示す．まず任意の $g \in \mathfrak{S}_3$ に対して、$g\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}g^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix} \in A$ は自明である．次に、任意の $g \in \mathfrak{S}_3$ に対して、

$$\mathrm{ord}\left(g\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}g^{-1}\right) = \mathrm{ord}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} = 3$$
$$\mathrm{ord}\left(g\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}g^{-1}\right) = \mathrm{ord}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} = 3$$

となるが、位数 3 の元は全て A に含まれているので、$g\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}g^{-1}$、$g\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}g^{-1} \in A$ である．以上より、任意の $g \in \mathfrak{S}_3$ に対して $gAg^{-1} \subset A$ が言える．よって、A は $\mathfrak{S}_3$ の正規部分群である． □

(5) $\mathfrak{S}_3$ と同型でない位数 6 の群の例：乗法群 $\mathbb{C}^\times$ の部分群 $\{e^{\frac{m\pi i}{3}} \mid m = 0, 1, \ldots, 5\}$.

理由：$\mathfrak{S}_3$ は非可換群であるが、$\{e^{\frac{m\pi i}{3}} \mid m = 0, 1, \ldots, 5\}$ は可換群であるため.

(別解) 理由：$e^{\frac{\pi i}{3}}$ は $\{e^{\frac{m\pi i}{3}} \mid m = 0, 1, \ldots, 5\}$ の位数 6 の元であるが、(4) より $\mathfrak{S}_3$ は位数 6 の元を持たないため. □

問題 5(1) 補足解説. 対称群 $\mathfrak{S}_n$ の元 $\begin{pmatrix}1&\cdots&n\\i_1&\cdots&i_n\end{pmatrix}$ は k を i_k に送る写像 $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ を表すことを思い出すと、

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&5&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&2&3&5&1\end{pmatrix}(1) = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&5&1&4\end{pmatrix}(4) = 1$$

である．この方法で 2、3、4、5 の像も順に求めれば積が計算ができる． □

問題 5(2) 補足解説. 対称群 $\mathfrak{S}_n$ の元 $\begin{pmatrix}1&\cdots&n\\i_1&\cdots&i_n\end{pmatrix}$ の逆元は、上下を入れ替えた $\begin{pmatrix}i_1&\cdots&i_n\\1&\cdots&n\end{pmatrix}$ で表される．このあと、上の数字と下の数字を組にしたまま、上の行の数字を 1 から 6 の順に並び変えれば解答例の答えを得る．(この 2 行で表わす表示においては、上の数字と下の数字の組さえ同じであれば同じ元を表す．) また、巡回置換 $(j_1\ j_2\ \cdots j_n)$ の逆元は $(j_n \cdots j_2\ j_1)$ である．巡回置換の定義を忘れた場合は第 4 回補足プリント "巡回置換について" を Scomb あるいは私 (大矢浩徳) の個人ウェブページからダウンロードして確認すること． □

問題 5(3) 補足解説. 対称群の元をどの 2 つも互いに素な巡回置換の積として表す方法については、第 4 回補足プリント "巡回置換について" の例 2 を参照すること．このような表し方は、積の順序および長さ 1 の巡回置換 (=単位元) を除いて一意的であった [補足プリント "巡回置換について"：定理 (I)]. 巡回置換を 2 行表示で表すためには、1 から 7 までの数字がどのように動かされるかを順に調べればよい．例えば、

$$6 \overset{(3\ 6\ 2)}{\mapsto} 2 \overset{(4\ 2\ 5)}{\mapsto} 5$$

である．なお、巡回置換の積に現れる数字は 6 までであるが、今この積は $\mathfrak{S}_7$ の元として考えているので、"7 はこの対称群の元で動かされない" という情報を忘れてはいけない． □

問題 5(4) 補足解説. 群 G において、$g \in G$ の位数 $\mathrm{ord}(g) := |\langle g \rangle|$ は $\mathrm{ord}(g) < \infty$ のとき、

$$\underline{g^m = e \text{ となる最小の正の整数 } m}$$

であった. (有限群の場合必ず $\mathrm{ord}(g) < \infty$ であることに注意.) よって元の位数を求めるためにはその元を何度もかけて、単位元にいつ戻るかを調べればよい. 例えば、$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ の場合、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} (\leftarrow \text{単位元})$$

となるので、$\mathrm{ord}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 3$ である.

また後半の問について、問題文中では "位数 3 の部分巡回群" という書き方をしたが、実際には位数 3 の群は巡回群しかないので、"巡回" と付ける必要はない (この点は今後授業で解説予定). 解答例では、

$$\underline{\text{群 } G \text{ の 2 元 } f, g \text{ に対し、} \mathrm{ord}(fgf^{-1}) = \mathrm{ord}(g)}$$

であるという事実を用いて "直接計算" を避けたが、位数 3 の部分群 A は 1 つで、元の数もそこまで多くないので、もちろん直接 $gAg^{-1} \subset A$ が任意の $g \in \mathfrak{S}_3$ に対して成立することを全て計算して確かめてもよい. この場合にも $g \in A$ の場合には $gAg^{-1} \subset A$ となることは A が群であることより自明なので、g が位数 2 の元 (3 つある) の場合にのみ確かめればよい.

実はここで現れた正規部分群 A は 3 **次交代群**と呼ばれ、$\mathfrak{A}_3$ と書かれる. 一般の n に対しても n **次交代群** $\mathfrak{A}_n$ という概念が存在し、$\mathfrak{S}_n$ の正規部分群となる. ($n = 3$ または、5 以上のときこれは唯一の<u>自明でない</u>$\mathfrak{S}_n$ の正規部分群である.) 定義は今後授業で行うが興味のある方はこれらのキーワードで調べてみるとよい. □

問題 5(5) 補足解説. 実は群論において、

位数 6 の群は位数 6 の巡回群あるいは 3 次対称群 $\mathfrak{S}_3$ のいずれかに同型になる

ことが知られている. 実際に、授業では位数 6 の群として 3 次 2 面体群 D_3 を挙げたが、確かにこれは $\mathfrak{S}_3$ と同型であった. これより、本問の答えは実は同型の違いを除いて一意的である. ちなみに解答例では、可換群と非可換群は同型にならないということを認めているが一応定義に沿って考えてみると以下のようになる：

$f\colon G \to G'$ を群の同型写像とし、逆写像を $f^{-1}\colon G' \to G$ とする. このとき、G が可換群であるとすると任意の g_1'、$g_2' \in G'$ に対し、

$$g_1'g_2' = f(f^{-1}(g_1'g_2')) = f(f^{-1}(g_1')f^{-1}(g_2')) = f(f^{-1}(g_2')f^{-1}(g_1')) = f(f^{-1}(g_2'))f(f^{-1}(g_1')) = g_2'g_1'$$

となるので、G' も可換群である.

基本的に同様の議論で、"群としての性質" は全て同型写像で移りあうと考えてよい. (別解の方の議論の正当性も上記のように定義に立ち返って確認してみよ.) □

問題 6

n 次対称群を $\mathfrak{S}_n$ と書く．以下の問に答えよ．

(1) $\mathfrak{S}_5$ の元の積 $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&4&5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&2&1&3\end{pmatrix}$ を再び $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\a_1&a_2&a_3&a_4&a_5\end{pmatrix}$ の形で表せ (答えのみでよい)．

(2) $\mathfrak{S}_6$ における $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&1&3&5&2&4\end{pmatrix}$ と $(3\ 1\ 4\ 2\ 6)$ の逆元をそれぞれ求めよ (答えのみでよい．元の表示の方法は授業中に提示したもののうち、あみだくじ以外であれば何でもよい)．

(3) $\mathfrak{S}_7$ の元 $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&4&6&5&2&3&1\end{pmatrix}$ をどの 2 つも互いに素な巡回置換の積として表せ．また、$\underline{\mathfrak{S}_7\text{ における}}$巡回置換の積 $(1\ 2\ 3)(2\ 3\ 6)$ を $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\a_1&a_2&a_3&a_4&a_5&a_6&a_7\end{pmatrix}$ の形で表せ (共に答えのみでよい)．

(4)

$$\mathfrak{S}_3=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\right\}$$

の各元の位数を求めよ (答えのみでよい)．また、$\mathfrak{S}_3$ の位数 3 の部分巡回群は正規部分群であることを証明せよ．

(5) $\mathfrak{S}_3$ と同型でない位数 6 の群の例を挙げ、同型でない理由を説明せよ．

問題 6 解答例.

(1) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&2&1&3&4\end{pmatrix}$. □

(2) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&1&3&5&2&4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&5&3&6&4&1\end{pmatrix}$. $(3\ 1\ 4\ 2\ 6)^{-1}=(6\ 2\ 4\ 1\ 3)$. □

(3) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&4&6&5&2&3&1\end{pmatrix}=(1\ 7)(2\ 4\ 5)(3\ 6)$. $(1\ 2\ 3)(2\ 3\ 6)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&1&6&4&5&3&7\end{pmatrix}$. □

(4)、(5) 問題 5 と同じ. □