代数学 I 第 3 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 2

行列群 $GL_2(\mathbb{C})$ の部分集合

$$SL_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1 \right\}$$

は $GL_2(\mathbb{C})$ の部分群となることを確かめよ (特殊線型群と呼ばれる).

問題 2 解答例. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$ より，$SL_2(\mathbb{C})$ は空ではない．任意の $g, h \in SL_2(\mathbb{C})$ に対し，

$$\det(gh) = \det(g)\det(h) = 1 \cdot 1 = 1 \qquad \det(g^{-1}) = \det(g)^{-1} = 1^{-1} = 1$$

より，$gh \in SL_2(\mathbb{C})$ かつ $g^{-1} \in SL_2(\mathbb{C})$ である．よって，$SL_2(\mathbb{C})$ は $GL_2(\mathbb{C})$ の部分群である． □

問題 2(2) 補足解説. 群 G の空でない部分集合 H が G の部分群であることの必要十分条件は、

『任意の $g, h \in H$ に対し、$gh \in H$ かつ $g^{-1} \in H$ となること』

である．このため，部分群であることを確かめるときはこの条件を確認する． □

線形代数の復習 (本講義の範囲では証明無しに用いてよい)

- (行列式 det と行列の積の関係)　n を正の整数とする．$n \times n$ 行列 g に対して，$\det(g)$ を g の行列式とする．このとき，$n \times n$ 行列 g, h に対し，

$$\det(gh) = \det(g)\det(h)$$

である．特に，$\det(g) \neq 0$ のとき，$\det(g^{-1}) = \det(g)^{-1}$ である．

- (2×2 行列の逆行列の一般形) 行列式 $ad - bc$ が 0 でない 2×2 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し，その逆行列は

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

である．

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

復習：行列式

n を正の整数とする．$n \times n$ 行列

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} = (g_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$$

に対して，g の行列式 $\det(g)$ は以下で定義される：

$$\det(g) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) g_{1\sigma(1)} g_{2\sigma(2)} \cdots g_{n\sigma(n)}$$

ここで，$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{\#\{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq n, \sigma(i) > \sigma(j)\}}$ である．

例えば，$n = 3$ のとき，

$$\mathfrak{S}_3 = \{e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5\},$$

$$e := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \sigma_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_4 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma_5 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

であるが，このとき，

$$\{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq 3, e(i) > e(j)\} = \emptyset \qquad \{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq 3, \sigma_1(i) > \sigma_1(j)\} = \{(1,2)\}$$

$$\{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq 3, \sigma_2(i) > \sigma_2(j)\} = \{(2,3)\} \qquad \{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq 3, \sigma_3(i) > \sigma_3(j)\} = \{(1,3),(2,3)\}$$

$$\{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq 3, \sigma_4(i) > \sigma_4(j)\} = \{(1,2),(1,3)\} \qquad \{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq 3, \sigma_5(i) > \sigma_5(j)\} = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$$

よって，

$$\mathrm{sgn}(e) = (-1)^0 = 1 \qquad \mathrm{sgn}(\sigma_1) = (-1)^1 = -1 \qquad \mathrm{sgn}(\sigma_2) = (-1)^1 = -1$$

$$\mathrm{sgn}(\sigma_3) = (-1)^2 = 1 \qquad \mathrm{sgn}(\sigma_4) = (-1)^2 = 1 \qquad \mathrm{sgn}(\sigma_5) = (-1)^3 = -1$$

なので，

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} &= \mathrm{sgn}(e) g_{1e(1)} g_{2e(2)} g_{3e(3)} + \mathrm{sgn}(\sigma_1) g_{1\sigma_1(1)} g_{2\sigma_1(2)} g_{3\sigma_1(3)} + \mathrm{sgn}(\sigma_2) g_{1\sigma_2(1)} g_{2\sigma_2(2)} g_{3\sigma_2(3)} \\ &\quad + \mathrm{sgn}(\sigma_3) g_{1\sigma_3(1)} g_{2\sigma_3(2)} g_{3\sigma_3(3)} + \mathrm{sgn}(\sigma_4) g_{1\sigma_4(1)} g_{2\sigma_4(2)} g_{3\sigma_4(3)} + \mathrm{sgn}(\sigma_5) g_{1\sigma_5(1)} g_{2\sigma_5(2)} g_{3\sigma_5(3)} \\ &= g_{11}g_{22}g_{33} - g_{12}g_{21}g_{33} - g_{11}g_{23}g_{32} + g_{12}g_{23}g_{31} + g_{13}g_{21}g_{32} - g_{13}g_{22}g_{31} \end{aligned}$$

となる．(この $n = 3$ の場合はサラスの公式と呼ばれる．)