代数学 I 第 4 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

5 次対称群 $\mathfrak{S}_5$ における以下の問に答えよ．

(1) $\mathfrak{S}_5$ の位数を求めよ．

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$ の形で表せ．

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$ を $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$ の形で表せ．

問題 1 解答例.

(1) $|\mathfrak{S}_5| = 5! = 120.$ □

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$ □

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$ □

問題 1 補足解説. 対称群の元を $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_{n-1} & i_n \end{pmatrix}$ という形で表示した際に積をどのように計算するかは講義で扱った通りである．しかしここでは対称群の定義に戻って，その正当性を確認しておく．

対称群 $\mathfrak{S}_n$ は，

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_n &= \{\sigma \mid \sigma \text{は 1 対 1 写像 } \sigma\colon \{1,2,\dots,n\} \to \{1,2,\dots,n\}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_{n-1} & i_n \end{pmatrix} \middle| \, i_1, i_2, \dots, i_n \text{は } 1,2,\dots,n \text{ の並べ替え} \right\}\end{aligned}$$

という集合に写像の合成で積を定めたものであった．ここで，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_{n-1} & i_n \end{pmatrix}$ は写像

$$\{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\},\ k \mapsto i_k$$

に対応するのであった．これより，$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とおくと，

$$\begin{aligned}
&(\sigma_1 \circ \sigma_2)(1) = \sigma_1(\sigma_2(1)) = \sigma_1(3) = 3 && (\sigma_1 \circ \sigma_2)(2) = \sigma_1(\sigma_2(2)) = \sigma_1(5) = 4 \\
&(\sigma_1 \circ \sigma_2)(3) = \sigma_1(\sigma_2(3)) = \sigma_1(4) = 5 && (\sigma_1 \circ \sigma_2)(4) = \sigma_1(\sigma_2(4)) = \sigma_1(1) = 2 \\
&(\sigma_1 \circ \sigma_2)(5) = \sigma_1(\sigma_2(5)) = \sigma_1(2) = 1
\end{aligned}$$

となるので，確かに $\sigma_1\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ である． □

* *e-mail*：`hoya@shibaura-it.ac.jp`

問題 2

5 次 2 面体群を

$$D_5 = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \sigma^3\tau, \sigma^4\tau\}$$

と書く．ここで，$\sigma^5 = e, \tau^2 = e, \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau$ である．このとき，以下の D_5 の元 (a)，(b) を σ^m，あるいは $\sigma^m\tau$ $(0 \leq m \leq 4^{*1})$ の形で表せ．

(a) $\sigma^3\sigma^4\tau\sigma^{-2}\tau^3\sigma^2\tau$
(b) $(\sigma^3\tau\sigma)^{-1}$

問題 2 解答例 (式変形がわかりやすいように関係式を用いて変形を行った箇所に色を付した)．

(a)

$$\begin{aligned}\sigma^3\sigma^4\tau\sigma^{-2}\tau^3\sigma^2\tau &= \sigma^3\sigma^4\sigma^2\tau\tau^3\sigma^2\tau \\ &= \sigma^9\tau^4\sigma^2\tau \\ &= \sigma^4\sigma^2\tau \\ &= \sigma^6\tau \\ &= \sigma\tau.\end{aligned}$$

□

(b)

$$\begin{aligned}(\sigma^3\tau\sigma)^{-1} &= \sigma^{-1}\tau^{-1}\sigma^{-3} \\ &= \sigma^{-1}\tau\sigma^{-3} \\ &= \sigma^{-1}\sigma^3\tau \\ &= \sigma^2\tau.\end{aligned}$$

□

問題 2 補足解説． まず，$\tau\sigma = \sigma^{-1}\tau$ の両辺に左から σ，右から σ^{-1} をかけると，$\sigma\tau = \tau\sigma^{-1}$ も成立することがわかる．よって，σ と τ の交換は例えば，

$$\begin{aligned}\tau\sigma^3 &= \tau\sigma\sigma\sigma = \sigma^{-1}\tau\sigma\sigma = \sigma^{-1}\sigma^{-1}\tau\sigma = \sigma^{-1}\sigma^{-1}\sigma^{-1}\tau = \sigma^{-3}\tau \\ \tau\sigma^{-2} &= \tau\sigma^{-1}\sigma^{-1} = \sigma\tau\sigma^{-1} = \sigma^2\tau\end{aligned}$$

などと計算できる．同様に考えると，一般に，任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$\tau\sigma^k = \sigma^{-k}\tau$$

が成立することがわかる．厳密な証明は数学的帰納法を用いて行うこと．

(b) の計算の 1 つ目の等号では以下の一般的な群論の命題を用いた：

命題．

群 G の元 $g_1, g_2, \ldots, g_n$ に対し，

$$(g_1g_2\cdots g_n)^{-1} = g_n^{-1}\cdots g_2^{-1}g_1^{-1}.$$

□

*1 配布した問題では，$1 \leq m \leq 4$ となっていましたが，一般には $m = 0$ もあり得るので修正しました．