代数学 I 第 5 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

4 次 2 面体群を

$$D_4 = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \sigma^3\tau\}$$

と書く．ここで，$\sigma^4 = e, \tau^2 = e, \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau$ である．$S := \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\}, T := \{e, \tau\} \subset D_4$ とする．S, T はそれぞれ D_4 の部分群である．以下の問に答えよ：

(1) D_4 における S による左剰余類 (D_4/S の元) を全て記述せよ．
(2) D_4 における S による右剰余類 ($S\backslash D_4$ の元) を全て記述せよ．
(3) D_4 における T による左剰余類 (D_4/T の元) を全て記述せよ．
(4) D_4 における T による右剰余類 ($T\backslash D_4$ の元) を全て記述せよ．
(5) D_4 の S に関する左完全代表系，T に関する左完全代表系をそれぞれ 1 つずつ記述せよ．
(6) D_4 における S の指数 $[D_4 : S]$，T の指数 $[D_4 : T]$ はそれぞれいくらか．

問題 1 解答例．

(1) $S = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\}, \tau S = \{\tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2, \tau\sigma^3\}(= \{\tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \sigma^3\tau\})$. □
(2) $S = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\}, S\tau = \{\tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \sigma^3\tau\}$. □
(3) $T = \{e, \tau\}, \sigma T = \{\sigma, \sigma\tau\}, \sigma^2 T = \{\sigma^2, \sigma^2\tau\}, \sigma^3 T = \{\sigma^3, \sigma^3\tau\}$. □
(4) $T = \{e, \tau\}, T\sigma = \{\sigma, \tau\sigma\}(= \{\sigma, \sigma^3\tau\}), T\sigma^2 = \{\sigma^2, \tau\sigma^2\}(= \{\sigma^2, \sigma^2\tau\}), T\sigma^3 = \{\sigma^3, \tau\sigma^3\}(= \{\sigma^3, \sigma\tau\})$. □
(5) D_4 の S に関する左完全代表系の例：$\{e, \tau\}$，D_4 の T に関する左完全代表系の例：$\{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\}$. □
(6) $[D_4 : S] = 2, [D_4 : T] = 4$. □

問題 1 補足解説． 剰余類を全て列挙する際には例えば次のように考えれば良い．ここでは (3) を例に出して説明を行う ((1)，(2)，(4) も同様である)：

最初に単位元 e を含む T による左剰余類を考えると，

$$eT = \{eg \mid g \in T\} = \{e, \tau\}(= T)$$

となる．次に，上の eT には含まれない元，例えば σ を含む T による左剰余類を考えると，

$$\sigma T = \{\sigma g \mid g \in T\} = \{\sigma, \sigma\tau\}$$

となる．次に，ここまでで既に見た $eT \cup \sigma T$ には含まれない元，例えば σ^2 を含む T による左剰余類を考えると，

$$\sigma^2 T = \{\sigma^2 g \mid g \in T\} = \{\sigma^2, \sigma^2\tau\}$$

となる．次に，ここまでで既に見た $eT \cup \sigma T \cup \sigma^2 T$ には含まれない元，例えば σ^3 を含む T による左剰余類を考えると，

$$\sigma^3 T = \{\sigma^3 g \mid g \in T\} = \{\sigma^3, \sigma^3\tau\}$$

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

となる．以上で D_4 の全ての元が現れたので，D_4 の T による左剰余類への分割が，

$$D_4 = T \cup \sigma T \cup \sigma^2 T \cup \sigma^3 T$$

と得られたことになる．(つまり，$D_4/T = \{T, \sigma T, \sigma^2 T, \sigma^3 T\}$．)

一般に群 G の部分群 H に関する左 (右) 完全代表系は，H による全ての左 (右) 剰余類から**ちょうど *1* つづつ**，元を抜き出してくれば良い．指数 $[G : H]$ は G を H による左 (右) 剰余類に分割した際にいくつに分割されるかという数である．これは定義より，商集合 G/H (または $H\backslash G$) の元の個数に他ならない．G の H に関する左 (右) 完全代表系の元の個数ということもできる．上だと $D_4/T = \{T, \sigma T, \sigma^2 T, \sigma^3 T\}$ なので，$[D_4 : T] = 4$ である． □

問題 1(1)，(2) より，

$$gS = Sg \ \forall g \in D_4$$

が成立することがわかる．一方 (3)，(4) より、

$$\sigma T \neq T\sigma$$

なので，T に関しては S の上記の性質の類似は成立しないことがわかる．これは，

S は D_4 の**正規部分群** (normal subgroup) であるが，T はそうではない

という事実に他ならない．