代数学 I 第 6 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

3 次対称群

$$\mathfrak{S}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

の各元の位数を求めよ．

問題 1 解答例.

$$\mathrm{ord}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 1 \qquad \mathrm{ord}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2 \qquad \mathrm{ord}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 2$$
$$\mathrm{ord}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 3 \qquad \mathrm{ord}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \qquad \mathrm{ord}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

□

問題 1 補足解説. 群 G において，$g \in G$ の位数 $\mathrm{ord}(g) := |\langle g \rangle|$ は $\mathrm{ord}(g) < \infty$ のとき，

『$g^m = e$ となる<u>最小の</u>正の整数 m』

であった．(G が有限群の場合，必ず $\mathrm{ord}(g) < \infty$ であることに注意．) よって元 g の位数を求めるためには g を何度もかけて，初めて単位元に戻るときを調べればよい．例えば，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_3$ の場合，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} (\leftarrow \text{単位元})$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

となるので，$\mathrm{ord}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 3$ である． □

問題 2

G を巡回群でない位数 14 の群とする．元 $g \in G$ が $g^2 \neq e$ (e は G の単位元) を満たすとき，g の位数を求めよ．

問題 2 解答例. Lagrange の定理の系より，$\mathrm{ord}(g)$ は $|G| = 14$ の約数である．よって，$\mathrm{ord}(g)$ は $1, 2, 7, 14$ のいずれかである．ここで，$\mathrm{ord}(g) = 1$ または 2 とすると，$g^2 = e$ となるので仮定に反する．また，$\mathrm{ord}(g) = 14$ とすると，位数の定義より $|\langle g \rangle| = 14$ となるが，$|G| = 14$ より，このとき $G = \langle g \rangle$ となる．これは，G が巡回群でないという仮定に反する．

以上より，$\mathrm{ord}(g) = 7$ である． □

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

問題 2 補足解説. Lagrange の定理の系より，$\mathrm{ord}(g)$ が $|G| = 14$ の約数であることが言えるが，この $\mathrm{ord}(g)$ の候補は $1, 2, 7, 14$ であり，特に 1 と 14 も候補であることに注意する．一般の群 G の元 g に対し，

(i) $\mathrm{ord}(g) = 1$ ならば，g は単位元 e，

(ii) $\mathrm{ord}(g) = |G| (< \infty)$ ならば，$G = \langle g \rangle$，つまり，G は g を生成元とする巡回群，

であることが言える．なお，問題 2 の群 G の具体例としては 7 次 2 面体群 D_7 が挙げられ，この場合 g の例としては σ^k $(1 \leq k \leq 6)$ が挙げられる．さらに，実は巡回群でない位数 14 の群は D_7 と同型なものしか存在しないことが知られている． $\square$