代数学 I 第 7 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

n を 3 以上の整数とし，n 次 2 面体群を

$$D_n = \{e, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{n-1}, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \ldots, \sigma^{n-1}\tau\}$$

と書く．ここで，$\sigma^n = e, \tau^2 = e, \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau$ である．以下の問に答えよ：

(1) $k, \ell \in \{0, 1 \ldots, n-1\}$ とする．このとき，以下の D_n の元 (a)，(b)，(c)，(d) を再び σ^m，あるいは $\sigma^m\tau$ ($m \in \mathbb{Z}$) の形*1で表せ．

(a) $\sigma^k(\sigma^\ell)(\sigma^k)^{-1}$ (b) $\sigma^k(\sigma^\ell\tau)(\sigma^k)^{-1}$ (c) $(\sigma^k\tau)(\sigma^\ell)(\sigma^k\tau)^{-1}$ (d) $(\sigma^k\tau)(\sigma^\ell\tau)(\sigma^k\tau)^{-1}$.

(2) σ の生成する D_n の部分群 $S = \langle\sigma\rangle$ が D_n の正規部分群であることを証明せよ.

問題 1 解答例.

(1)

(a) σ^ℓ (b) $\sigma^{\ell+2k}\tau$ (c) $\sigma^{-\ell}$ (d) $\sigma^{2k-\ell}\tau$.

□

(2) まず，

$$S = \langle\sigma\rangle = \{\sigma^m \mid m \in \mathbb{Z}\} = \{e, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{n-1}\}$$

であることより，S の任意の元は σ^ℓ，$\ell \in \{0, 1 \ldots, n-1\}$ の形に書ける．これより，任意の $g \in D_n$ に対し，$g\sigma^\ell g^{-1} \in S$ を言えばよいが，D_n の任意の元は σ^k，あるいは $\sigma^k\tau$ ($k \in \{0, 1 \ldots, n-1\}$) の形をしているので，

$$\sigma^k(\sigma^\ell)(\sigma^k)^{-1}, (\sigma^k\tau)(\sigma^\ell)(\sigma^k\tau)^{-1} \in S$$

を示せばよい. (1) の (a)，(c) より，$\sigma^k(\sigma^\ell)(\sigma^k)^{-1} = \sigma^\ell \in S$，$(\sigma^k\tau)(\sigma^\ell)(\sigma^k\tau)^{-1} = \sigma^{-\ell} \in S$ なので，示すべきことは示された. □

問題 1(1) 補足解説. 以下の事実を思い出す：

一般の n 次 2 面体群 D_n において，

$$\tau\sigma^k = \sigma^{-k}\tau, \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

説明は第 4 回レポート課題解答の問題 2 補足解説を参照．これと以下の命題を用いて計算すればよい.

命題.

群 G の元 $g_1, g_2, \ldots, g_m$ に対し，

$$(g_1 g_2 \cdots g_m)^{-1} = g_m^{-1} \cdots g_2^{-1} g_1^{-1}.$$

□

* *e-mail*: hoya@shibaura-it.ac.jp

*1 m を必ずしも $0 \leq m \leq n-1$ に取る必要は無い.

問題 1(2) 補足解説. 一般に群 G の部分群 H が正規であることの必要十分条件は，

『任意の $h \in H$，$g \in G$ に対し，$ghg^{-1} \in H$ であること』

であったので，この問では G を D_n，H を S として，これを証明すれば良い．

ちなみに，D_n における S の指数 $[D_n : S]$ は Lagrange の定理より，

$$[D_n : S] = \frac{|D_n|}{|S|} = \frac{2n}{n} = 2$$

である．実は，(2) の事実は以下の一般的な事実の結果として証明することもできる．

命題.

群 G の指数 2 の部分群 H は正規部分群となる．

命題の証明. $[G : H] = 2$ のとき，$g_0 \notin H$ なる G の元をとると，G の左・右剰余類への分解は

$$G = H \cup g_0 H = H \cup H g_0$$

となる．ここで，$H \cap g_0 H = H \cap H g_0 = \emptyset$ であることに注意すると，$g_0 H = G \setminus H = H g_0$ であることがわかる．　($G \setminus H$ は商空間ではなく H の G における補集合の意味.)

この議論より，各 $g \in G$ に対して，

$$\begin{cases} g \in H \text{ のとき，} gH = H = Hg \\ g \notin H \text{ のとき，} gH = G \setminus H = Hg \end{cases}$$

であることがわかる．よって，任意の $g \in G$ に対して $gH = Hg$ となるので，H は G の正規部分群である．□

□