代数学 I 第 8 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

3 次 2 面体群を

$$D_3 = \{e, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau\}$$

と書く．ここで，$\sigma^3 = e, \tau^2 = e, \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau$ である．このとき，群準同型写像 $f\colon D_3 \to \mathfrak{S}_3$ であって，

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \tau \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

を満たすものが存在する．(このことは証明しなくて良い.) このとき，以下の $\mathfrak{S}_3$ の元を具体的に求めよ：

(1) $f(\sigma^2\tau\sigma\tau^2)$
(2) $f((\sigma^2\tau)^{-1})$

問題 1 解答例.

(1)

$$f(\sigma^2\tau\sigma\tau^2) = f(\sigma\tau) = f(\sigma)f(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

□

(2)

$$f((\sigma^2\tau)^{-1}) = f(\tau\sigma^{-2}) = f(\sigma^2\tau) = f(\sigma)^2 f(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

□

問題 1 補足解説. 群準同型写像の定義から，

$$f(\sigma^2\tau\sigma\tau^2) = f(\sigma)^2 f(\tau) f(\sigma) f(\tau)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^2$$

とそのまま計算してももちろん正しい結果となる．(2) に関しては群準同型写像の性質を用いて，$f((\sigma^2\tau)^{-1}) = f(\sigma^2\tau)^{-1}$ として計算してもよい． □

問題 2

G を群とし，$a \in G$ とする．このとき，写像 σ_a を

$$\sigma_a\colon G \to G, g \mapsto aga^{-1}$$

と定める．

(1) σ_a が群準同型写像であることを証明せよ．
(2) σ_a が群同型写像であることを証明せよ．(この σ_a は内部自己同型と呼ばれる．)

* *e-mail*: hoya@shibaura-it.ac.jp

問題 2 解答例.

(1) 任意の $g, h \in G$ に対し，

$$\sigma_a(gh) = agha^{-1} = aga^{-1}aha^{-1} = \sigma_a(g)\sigma_a(h)$$

より，σ_a は群準同型写像である． □

(2)[解 1：定義通り逆写像を構成する]

(1) より，$\sigma_{a^{-1}} \colon G \to G, g \mapsto a^{-1}ga$ も群準同型写像である．このとき，任意の $g \in G$ に対し，

$$(\sigma_{a^{-1}} \circ \sigma_a)(g) = a^{-1}(aga^{-1})a = g \qquad (\sigma_a \circ \sigma_{a^{-1}})(g) = a(a^{-1}ga)a^{-1} = g$$

となるので，$\sigma_{a^{-1}} \circ \sigma_a = \sigma_a \circ \sigma_{a^{-1}} = \mathrm{id}_G$ である．よって，σ_a は群同型写像である．

(2)[解 2：σ_a の全単射性を述べる]

(1) より σ_a は群準同型写像なので，これが全単射であることを示せばよい．

<u>全射性：</u>任意の $g \in G$ に対し，$g = a(a^{-1}ga)a^{-1} = \sigma_a(a^{-1}ga) \in \mathrm{Im}(\sigma_a)$ より，$\mathrm{Im}(\sigma_a) = G$ である．よって，σ_a は全射である．

<u>単射性：</u>次に，$\sigma_a(g) = e$ (e は G の単位元) とすると，$aga^{-1} = e$ より，$g = e$ である．よって，$\mathrm{Ker}(\sigma_a) = \{e\}$ より，σ_a は単射である．

以上より，示すべきことは示された． □

問題 2(2) 補足解説. (2) の解 1 で，σ_a の逆写像の候補を構成する際に σ_a の対応をそのまま逆にして

$\sigma'_a \colon G \to G, aga^{-1} \mapsto g$ と<u>定義してはいけない</u>！

理由は講義でも述べたが以下の通りである：

- σ'_a は写像であるからには，任意の $g \in G$ に対し，$\sigma'_a(g)$ が決まっていないといけない．しかし，上の定義だと，aga^{-1} の形をしていないものの像が不明である．この問題解消のためには，任意の G の元が aga^{-1} の形に書けることを言えば良いのであるが，このことを言うのは結局 σ_a の全射性を言うことに他ならない．
- $aga^{-1} \mapsto g$ という対応が well-defined であるということは非自明である．なぜなら，上の対応が矛盾なく定義されるためには，$aga^{-1} = ag'a^{-1}$ ならば $g = g'$ でないといけないが，このチェックは結局 σ_a の単射性を言うことに他ならないためである．

まとめると，σ_a の逆写像が欲しい場合，上の σ'_a のように "見るからに逆写像" であるものを作りたくなるのであるが，この書き方が許されるのは残念ながら σ_a の全単射性を示してからである．よって，群同型であることの証明にはこの構成は使えない． □