代数学 I 第 9 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

群 G に対し，

$$\mathrm{Aut}(G) := \{f\colon G \to G \mid f \text{ は群同型写像 }\}$$

とすると $\mathrm{Aut}(G)$ は写像の合成に関して群をなす．(このことは証明しなくてよい.) ただし，単位元は id_G，$f \in \mathrm{Aut}(G)$ の逆元は逆写像 f^{-1} である．さらに，各 $a \in G$ に対し，$\sigma_a\colon G \to G, g \mapsto aga^{-1}$ は群同型写像なので (このことも証明しなくて良い．第 8 回レポート課題参照.)，

$$\mathrm{I}(G) := \{\sigma_a \mid a \in G\} \subset \mathrm{Aut}(G)$$

である．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $\mathrm{I}(G)$ が $\mathrm{Aut}(G)$ の正規部分群であることを証明せよ．

(2) $\varphi\colon G \to \mathrm{I}(G), a \mapsto \sigma_a$ が群準同型写像であることを証明せよ．

問題 1 解答例.

(1) $\mathrm{I}(G)$ は定義より明らかに空ではない．任意の $a, b, g \in G$ に対し，

$$(\sigma_a \circ \sigma_b)(g) = \sigma_a(\sigma_b(g)) = a(bgb^{-1})a^{-1} = (ab)g(ab)^{-1} = \sigma_{ab}(g)$$

より，$\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_{ab} \in \mathrm{I}(G)$．また，任意の $a, g \in G$ に対し，

$$\begin{aligned}(\sigma_a \circ \sigma_{a^{-1}})(g) &= \sigma_a(\sigma_{a^{-1}}(g)) = a(a^{-1}ga)a^{-1} = g = \mathrm{id}_G(g)\\ (\sigma_{a^{-1}} \circ \sigma_a)(g) &= \sigma_{a^{-1}}(\sigma_a(g)) = a^{-1}(aga^{-1})a = g = \mathrm{id}_G(g)\end{aligned}$$

より，$\sigma_a^{-1} = \sigma_{a^{-1}} \in \mathrm{I}(G)$．以上より，$\mathrm{I}(G)$ は $\mathrm{Aut}(G)$ の部分群である．

さらに，任意の $f \in \mathrm{Aut}(G)$，$a, g \in G$ に対し，

$$(f \circ \sigma_a \circ f^{-1})(g) = f(\sigma_a(f^{-1}(g))) = f(af^{-1}(g)a^{-1}) = f(a)f(f^{-1}(g))f(a^{-1}) = f(a)gf(a)^{-1} = \sigma_{f(a)}(g)$$

となるので，$f \circ \sigma_a \circ f^{-1} = \sigma_{f(a)} \in \mathrm{I}(G)$．よって，$\mathrm{I}(G)$ は $\mathrm{Aut}(G)$ の正規部分群である． □

(2) (1) の計算から任意の $a, b \in G$ に対し，

$$\varphi(ab) = \sigma_{ab} = \sigma_a \circ \sigma_b = \varphi(a) \circ \varphi(b).$$

よって，φ は群準同型写像である． □

問題 1 補足解説. 群 G に対し，G から G 自身への群同型写像は G の**自己同型写像** (automorphism) と呼ばれる．また，それらを集めてできる群 $\mathrm{Aut}(G)$ は G の**自己同型群** (automorphism group) と呼ばれる．Aut は automorphism の頭 3 文字をとったものである．$\mathrm{Aut}(G)$ が写像の合成に関して群をなすことは以下のように確かめられる：

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

写像の合成で $\mathrm{Aut}(G)$ が閉じること：任意の $f, f' \in \mathrm{Aut}(G)$，$g, g' \in G$ に対し，

$$(f \circ f')(gg') = f(f'(gg')) = f(f'(g)f'(g')) = f(f'(g))f(f'(g')) = (f \circ f')(g)(f \circ f')(g')$$

より，$f \circ f'$ は群準同型である．また，$(f \circ f')(G) = f(f'(G)) = f(G) = G$ より，$f \circ f'$ は全射．さらに，f, f' は単射なので，

$$\mathrm{Ker}(f \circ f') = \{g \in G \mid (f \circ f')(g) = e\} = \{g \in G \mid f(f'(g)) = e\} = \{g \in G \mid f'(g) = e\} = \{e\}$$

以上より，$f \circ f'$ は全単射群準同型写像なので群同型写像となる．よって，$f \circ f' \in \mathrm{Aut}(G)$．(一般に同じ議論で，群準同型の合成は群準同型，全射群準同型の合成は全射群準同型，単射群準同型の合成は単射群準同型であることが言える．)

結合法則：任意の $f, f', f'' \in \mathrm{Aut}(G)$，$g \in G$ に対し，

$$((f \circ f') \circ f'')(g) = f(f'(f''(g))) = (f \circ (f' \circ f''))(g)$$

となるので，$(f \circ f') \circ f'' = f \circ (f' \circ f'')$ である．(結合法則の成立は写像の合成の一般論である．)

単位元の存在：$\mathrm{id}_G \in \mathrm{Aut}(G)$ であるが，任意の $f \in \mathrm{Aut}(G)$，$g \in G$ に対し，

$$(\mathrm{id}_G \circ f)(g) = \mathrm{id}_G(f(g)) = f(g) = f(\mathrm{id}_G(g)) = (f \circ \mathrm{id}_G)(g)$$

となるので，$\mathrm{id}_G \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_G$．よって，$\mathrm{id}_G$ は単位元の満たすべき性質を満たす．

逆元の存在：群同型写像の定義より，任意の $f \in \mathrm{Aut}(G)$ に対し，逆写像 f^{-1} も群同型写像なので，$f^{-1} \in \mathrm{Aut}(G)$ である．定義より，

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_G \qquad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_G$$

なので，f^{-1} は写像の合成に関する f の逆元である．

以上より $\mathrm{Aut}(G)$ は写像の合成に関して群をなす．

話をレポート課題解答例に戻すと，(1) で問われた正規部分群であることの証明の一般的な方法については，例えば中間試験予告問題 + 解答例の問題 1(2) 補足解説を参照のこと．(2) の解答例は準同型写像であることを定義通り確認したものである． □