代数学 I 第 11 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

$\mathfrak{S}_4$ を 4 次対称群とする．$\mathfrak{S}_4$ の各元 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{pmatrix}$ は 1 対 1 写像 $\sigma\colon \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}, k \mapsto i_k =: \sigma(k)$ と考えられため，$X := \{\{i,j,k\} \mid i,j,k \in \{1,2,3,4\}\}$ としたとき，

$$\mathfrak{S}_4 \times X \to X, (\sigma, \{i,j,k\}) \mapsto \sigma.\{i,j,k\} := \{\sigma(i), \sigma(j), \sigma(k)\}$$

は X 上の $\mathfrak{S}_4$ の作用を定める．ここで，$\{i,j,k\}$ は i,j,k の 3 元からなる集合の意味であり，特に $\{i,j,k\} = \{j,i,k\} = \{k,j,i\} = \cdots$ であることに注意する．また，$\{i,j,k\} \in X$ は i,j,k の間の任意の重複を許す．このとき，以下の問に答えよ：

(1) X の元の個数を求めよ．

(2) $\mathfrak{S}_4$ の $\{1,2,3\} \in X$ における固定部分群 $(\mathfrak{S}_4)_{\{1,2,3\}}$ の位数，および軌道 $\mathfrak{S}_4.\{1,2,3\}$ に含まれる元の個数を求めよ．

(3) $\mathfrak{S}_4$ の $\{3,3,4\} \in X$ における固定部分群 $(\mathfrak{S}_4)_{\{3,3,4\}}$ の位数，および軌道 $\mathfrak{S}_4.\{3,3,4\}$ に含まれる元の個数を求めよ．

(4) X における $\mathfrak{S}_4$-軌道の個数を求めよ．

問題 1 解答例.

(1) $|X| = {}_{3+4-1}\mathrm{C}_3 = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20.$ □

(2)

$$\begin{aligned}(\mathfrak{S}_4)_{\{1,2,3\}} &= \{\sigma \in \mathfrak{S}_4 \mid \{\sigma(1),\sigma(2),\sigma(3)\} = \{1,2,3\}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_4 \,\middle|\, \{i_1,i_2,i_3\} = \{1,2,3\} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i_1 & i_2 & i_3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_4 \,\middle|\, \{i_1,i_2,i_3\} = \{1,2,3\} \right\}.\end{aligned}$$

よって，$(\mathfrak{S}_4)_{\{1,2,3\}}$ の位数は $1,2,3$ の 3 文字を 1 列に並べる場合の数に等しく，$3! = 6$. さらに，

$$|\mathfrak{S}_4.\{1,2,3\}| = \frac{|\mathfrak{S}_4|}{|(\mathfrak{S}_4)_{\{1,2,3\}}|} = \frac{24}{6} = 4.$$

(3)

$$\begin{aligned}(\mathfrak{S}_4)_{\{3,3,4\}} &= \{\sigma \in \mathfrak{S}_4 \mid \{\sigma(3),\sigma(3),\sigma(4)\} = \{3,3,4\}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_4 \,\middle|\, \{i_3,i_3,i_4\} = \{3,3,4\} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i_1 & i_2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_4 \,\middle|\, \{i_1,i_2\} = \{1,2\} \right\}.\end{aligned}$$

よって，$(\mathfrak{S}_4)_{\{3,3,4\}}$ の位数は $1,2$ の 2 文字を 1 列に並べる場合の数に等しく，$2! = 2$. さらに，

$$|\mathfrak{S}_4.\{3,3,4\}| = \frac{|\mathfrak{S}_4|}{|(\mathfrak{S}_4)_{\{3,3,4\}}|} = \frac{24}{2} = 12.$$

* *e-mail*：`hoya@shibaura-it.ac.jp`

(4) $\mathfrak{S}_4$ の元は相異なる数字を相異なる数字に対応させる写像なので，$\{1,1,1\}$ は $\mathfrak{S}_4$-軌道 $\mathfrak{S}_4.\{1,2,3\}$, $\mathfrak{S}_4.\{3,3,4\}$ のいずれにも含まれない．よって，$\{1,1,1\}$ を含む $\mathfrak{S}_4$-軌道を考えると，

$$\mathfrak{S}_4.\{1,1,1\} = \{\{1,1,1\},\{2,2,2\},\{3,3,3\},\{4,4,4\}\}$$

であり，特に $|\mathfrak{S}_4.\{1,1,1\}| = 4$ である．いま，$\mathfrak{S}_4.\{1,1,1\}, \mathfrak{S}_4.\{3,3,4\}, \mathfrak{S}_4.\{1,2,3\}$ は互いに相異なる $\mathfrak{S}_4$-軌道であり，(1)，(2)，(3) と合わせると，

$$|X| = 20 = 4 + 12 + 4 = |\mathfrak{S}_4.\{1,1,1\}| + |\mathfrak{S}_4.\{3,3,4\}| + |\mathfrak{S}_4.\{1,2,3\}|$$

となるので，X の $\mathfrak{S}_4$-軌道への分解は $X = \mathfrak{S}_4.\{1,1,1\} \cup \mathfrak{S}_4.\{3,3,4\} \cup \mathfrak{S}_4.\{1,2,3\}$ となる．よって，X における $\mathfrak{S}_4$-軌道の個数は 3 つ． □

問題 1 補足解説． 本問においても重要な群の軌道の構造についての基本的な定理を思い出しておく：

定理

G を群，X を集合とし，

$$G \times X \to X,\ (g,x) \mapsto g.x$$

を X 上の G の作用とする．このとき，任意の $x \in X$ に対し，

$$G/G_x \to G.x,\ gG_x \mapsto g.x$$

は集合としての全単射である．特に G が有限群のとき，

$$|G.x| = |G/G_x| = \frac{|G|}{|G_x|}$$

である．(これは G の G_x における指数に他ならない.)

この定理より，ある元の固定部分群の位数を知れば，その元を含む軌道の元の個数がわかることになる．特に，有限群 G の群作用に関する G-軌道の元の個数は必ず G の位数の約数となる．

軌道分解という言葉もここで復習しておく：

定義． G を群，X を集合とし，

$$G \times X \to X,\ (g,x) \mapsto g.x$$

を X 上の G の作用とする．このとき，X は G の作用に関する軌道の和に分割される．つまり，

$$X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$$

ただし，各 O_λ は軌道，Λ は各軌道を添え字付ける適当な添え字集合，という形に書ける．$\lambda \neq \lambda'$ であれば $O_\lambda \cap O_{\lambda'} = \emptyset$ である．これを**軌道分解**という．
G の作用を用いて X 上の同値関係 $\sim$ を

$$x \sim y \iff \text{ある } g \in G \text{ が存在して，} x = g.y$$

で定めることができることを思い出すと，各軌道 O_λ は同値関係 $\sim$ に関する同値類とちょうど対応し，軌道分解できることは同値関係の一般論から従う．

本問の設定においては X を軌道分解することは結局，

$$\{i,j,k\} \text{ の } i,j,k \text{ のうちいくつが相異なっているかによってグループ分け}$$

することに他ならない．実際，$\mathfrak{S}_4$-軌道は『3 つとも同じ数字であるものたちのなす集合 ($\mathfrak{S}_4.\{1,1,1\}$)』，『同じ数字がちょうど 2 つあるものたちのなす集合 ($\mathfrak{S}_4.\{1,1,2\}$)』，『3 つとも異なる数字のものたちのなす集合 ($\mathfrak{S}_4.\{1,2,3\}$)』の 3 つであった． □