代数学 I 第 12 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

n を 3 以上の整数とし，n 次 2 面体群を

$$D_n = \{e, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{n-1}, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \ldots, \sigma^{n-1}\tau\}$$

と書く．ここで，$\sigma^n = e, \tau^2 = e, \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau$ である．以下の問に答えよ：

(1) $k, \ell \in \{0, 1 \ldots, n-1\}$ とする．このとき，以下の D_n の元 (a)，(b)，(c)，(d) を再び σ^m，あるいは $\sigma^m\tau$ $(m \in \mathbb{Z})$ の形*1で表せ．

(a) $\sigma^k(\sigma^\ell)(\sigma^k)^{-1}$　(b) $\sigma^k(\sigma^\ell\tau)(\sigma^k)^{-1}$　(c) $(\sigma^k\tau)(\sigma^\ell)(\sigma^k\tau)^{-1}$　(d) $(\sigma^k\tau)(\sigma^\ell\tau)(\sigma^k\tau)^{-1}$.

(2) D_3 の共役類を具体的な元を用いてすべて記述せよ．

(3) D_4 の共役類を具体的な元を用いてすべて記述せよ．

(4) D_4 の中心 $Z(D_4)$ を具体的な元を用いて記述せよ．

問題 1 解答例.

(1)

(a) σ^ℓ　(b) $\sigma^{\ell+2k}\tau$　(c) $\sigma^{-\ell}$　(d) $\sigma^{2k-\ell}\tau$

□

(2) $\{e\}$，$\{\sigma, \sigma^2\}$，$\{\tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau\}$ □

(3) $\{e\}$，$\{\sigma, \sigma^3\}$，$\{\sigma^2\}$，$\{\tau, \sigma^2\tau\}$，$\{\sigma\tau, \sigma^3\tau\}$ □

(4) $\{e, \sigma^2\}$ □

問題 1(1) 補足解説. 本問は第 7 回レポート課題の問題 1(1) と同じ問題である． □

問題 1(2), (3) 補足解説. まず，共役類の定義を思い出す．

定義. G を群とする．各 $g \in G$ に対し，g **の共役類** $K(g)$ は，

$$K(g) := \{hgh^{-1} \mid h \in G\}$$

と定義される．これは同値関係

$$g_1 \sim g_2 \ \Leftrightarrow\ \text{ある } h \in G \text{ が存在して，} g_1 = hg_2h^{-1}$$

に関する同値類であることに注意する．なお $g_1 \sim g_2$ のとき，g_1 **と** g_2 **は共役である**という．

(2) の解き方：最初に単位元 e の共役類を考えると，任意の $h \in D_3$ に対し，$heh^{-1} = e$ なので，$K(e) = \{e\}$ である．(同じ理由で任意の群 G において $\{e\}$ は共役類の 1 つとなる.)

---

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

*1 m を必ずしも $0 \leq m \leq n-1$ に取る必要は無い．

次に ($K(e)$ に含まれない元であれば何でも良いが)，$\sigma \in D_3$ の共役類を考える．(1) の (a)，(c) での計算 ($\ell = 1$ として適用する) より，

$$
\begin{aligned}
K(\sigma) &= \{\sigma^k \sigma (\sigma^k)^{-1}, (\sigma^k \tau)\sigma(\sigma^k \tau)^{-1} \mid k = 0, 1, 2\} \\
&= \{\sigma, \sigma^{-1}\} = \{\sigma, \sigma^2\}.
\end{aligned}
$$

ちなみに，共役類は共役という同値関係に関する同値類なので，$\sigma^2 \in K(\sigma)$ であることから，$K(\sigma) = K(\sigma^2)$ であることにも注意する．

次に ($K(e)$，$K(\sigma)$ のいずれにも含まれない元であれば何でも良いが)，$\tau \in D_3$ の共役類を考える．(1) の (b)，(d) での計算 ($\ell = 0$ として適用する) より，

$$
\begin{aligned}
K(\tau) &= \{\sigma^k \tau (\sigma^k)^{-1}, (\sigma^k \tau)\tau(\sigma^k \tau)^{-1} \mid k = 0, 1, 2\} \\
&= \{\tau, \sigma^2\tau, \sigma^4\tau\} = \{\tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau\}.
\end{aligned}
$$

ここで，$\sigma^3 = e$ を用いた．以上で D_3 の全ての元がいずれかの共役類の中に現れたので，D_3 の共役類への分割が $D_3 = K(e) \cup K(\sigma) \cup K(\tau)$ となることがわかる (D_3 の D_3 上の共役作用に関する軌道分解)．よって，D_3 の共役類は $K(e)$，$K(\sigma)$，$K(\tau)$ で全てである．

(3) の D_4 の場合も手順は全く同じである．一般に全く同様の計算により，3 以上の整数 n に対して，D_n の共役類への分解は

$$
\begin{cases}
n \text{ が奇数のとき，} D_n = \{e\} \cup \{\sigma, \sigma^{n-1}\} \cup \cdots \cup \{\sigma^{\frac{n-1}{2}}, \sigma^{\frac{n+1}{2}}\} \cup \{\tau, \sigma\tau, \ldots, \sigma^{n-1}\tau\} \\
n \text{ が偶数のとき，} D_n = \{e\} \cup \{\sigma, \sigma^{n-1}\} \cup \cdots \cup \{\sigma^{\frac{n}{2}-1}, \sigma^{\frac{n}{2}+1}\} \cup \{\sigma^{\frac{n}{2}}\} \cup \{\tau, \sigma^2\tau, \ldots, \sigma^{n-2}\tau\} \cup \{\sigma\tau, \sigma^3\tau, \ldots, \sigma^{n-1}\tau\}
\end{cases}
$$

となる． □

問題 1(4) 補足解説． 群 G の中心 $Z(G)$ の定義は以下である：

> **定義．** G を群とする．G の**中心** $Z(G)$ は，
>
> $$Z(G) := \{z \in G \mid zg = gz \ \forall g \in G\}$$
>
> と定義される (つまり任意の G の元と可換な元の集合)．これは G の正規部分群であった．

これより，一般に $D_n (n \geq 3)$ の中心 $Z(D_n)$ を求めるということは任意の $k \in \{0, 1 \ldots, n-1\}$ に対し，

$$\sigma^k g (\sigma^k)^{-1} = g \qquad\qquad (\sigma^k \tau) g (\sigma^k \tau)^{-1} = g$$

なる $g \in D_n$ を求めることである．(1) の (b) での計算より，$\sigma^\ell \tau$ の形の元でこれを満たすものは存在しない ($n \geq 3$ のとき，$\sigma^\ell \tau \neq \sigma^{\ell+2}\tau$)．よって，$\sigma^\ell$ の形の元から中心となるものを探す．すると (1) の (a)，(c) での計算より，$\sigma^\ell = \sigma^{-\ell}$ なるものが存在すればこれが中心の元となることがわかる．この式は $\sigma^{2\ell} = e$ と同値なので，$\ell \in \{0, \ldots, n-1\}$ とすると，これは [$2\ell = 0$ または n] と同値である．よって，一般に $D_n (n \geq 3)$ の中心 $Z(D_n)$ は，

$$
Z(D_n) = \begin{cases}
\{e\} & n \text{ が奇数のとき，} \\
\{e, \sigma^{n/2}\} & n \text{ が偶数のとき．}
\end{cases}
$$

となることがわかる．

なお，一般の群 G において共役類の話と中心との関係を考えてみると定義から，

$$g \in Z(G) \iff K(g) = \{g\}$$

がわかる．(3) と (4) の解答を比べてみると確かにこの関係が成立していることが確かめられる． □