代数学 I 計算練習ドリル

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)

以下では，

- $\mathfrak{S}_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \middle| \, i_1, i_2, \ldots, i_n \text{は} 1, 2, \ldots, n \text{の並べ替え} \right\}$ を n 次対称群，
- $D_n = \{e, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{n-1}, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \ldots, \sigma^{n-1}\tau\}$ を n 次 2 面体群，ただし $\sigma^n = e, \tau^2 = e, \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau$，

とする．

問題． 以下の元を括弧内で指定した形に直せ．

(1) $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ の元 $[33]_{16} + [50]_{16}$．　【$[n]_{16}, 0 \leq n \leq 15$ の形】

(2) $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ の元 $[15]_{12} + [32]_{12} + [23]_{12}$．　【$[n]_{12}, 0 \leq n \leq 11$ の形】

(3) $(\mathbb{Z}/21\mathbb{Z})^\times$ の元 $[5]_{21} \cdot [13]_{21}$．　【$[n]_{21}, 0 \leq n \leq 20$ の形】

(4) $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times$ の元 $[25]_{24} \cdot [7]_{24} \cdot [11]_{24}$．　【$[n]_{24}, 0 \leq n \leq 23$ の形】

(5) $(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^\times$ の元 $[3]_{16}^{-1}$．　【$[n]_{16}, 0 \leq n \leq 15$ の形】

(6) $(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z})^\times$ の元 $[25]_{18}^{-1}$．　【$[n]_{18}, 0 \leq n \leq 17$ の形】

(7) $\mathfrak{S}_5$ の元 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$．　【$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$ の形】

(8) $\mathfrak{S}_5$ の元 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$．　【$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$ の形】

(9) $\mathfrak{S}_4$ の元 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$．　【$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ の形】

(10) $\mathfrak{S}_6$ の元 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$．　【$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}$ の形】

(11) $\mathfrak{S}_8$ の元 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 1 & 5 & 6 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$．　【$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \end{pmatrix}$ の形】

(12) $\mathfrak{S}_4$ の元 $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1}$．　【$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ の形】

(13) D_8 の元 $\sigma^{-2}\sigma^4\sigma^{10}$．　【$\sigma^m$，あるいは$\sigma^m\tau$ $(0 \leq m \leq 7)$ の形】

(14) D_6 の元 $\tau\sigma^4$．　【σ^m，あるいは$\sigma^m\tau$ $(0 \leq m \leq 5)$ の形】

(15) D_4 の元 $\tau\sigma^2\sigma^5\tau^2\sigma^{-2}$．　【$\sigma^m$，あるいは$\sigma^m\tau$ $(0 \leq m \leq 3)$ の形】

(16) D_6 の元 $(\sigma^4\tau)^{-1}$．　【σ^m，あるいは$\sigma^m\tau$ $(0 \leq m \leq 5)$ の形】

(17) D_4 の元 $(\sigma^2\tau\sigma^3)^{-1}$．　【$\sigma^m$，あるいは$\sigma^m\tau$ $(0 \leq m \leq 3)$ の形】

(18) D_7 の元 $\sigma\tau^{-3}(\sigma^6\tau\sigma^2)^{-1}\sigma^3$．　【$\sigma^m$，あるいは$\sigma^m\tau$ $(0 \leq m \leq 6)$ の形】

解答.

(1) $[3]_{16}$

(2) $[10]_{12}$

(3) $[2]_{21}$

(4) $[5]_{24}$

(5) $[11]_{16}$

(6) $[13]_{18}$

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

(10) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

(11) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & 1 & 4 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

(12) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

(13) σ^4

(14) $\sigma^2\tau$

(15) $\sigma^3\tau$

(16) $\sigma^4\tau$

(17) $\sigma^3\tau$

(18) e $\square$