代数学 I 計算練習ドリル 2

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)

以下では，

- $\mathfrak{S}_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \middle| \, i_1, i_2, \dots, i_n \text{は} 1, 2, \dots, n \text{の並べ替え} \right\}$ を n 次対称群，
- $D_n = \{e, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{n-1}, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \dots, \sigma^{n-1}\tau\}$ を n 次 2 面体群，ただし $\sigma^n = e, \tau^2 = e, \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau$，

とする．

問題.

(1) 群準同型写像 $f \colon D_5 \to \mathfrak{S}_5$ であって，

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \tau \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

を満たすものが存在する．(このことは証明しなくて良い.) このとき，以下の $\mathfrak{S}_5$ の元を $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$ の形で具体的に求めよ：

(1-1) $f(\tau\sigma^2\tau\sigma^3\tau)$
(1-2) $f((\tau\sigma^2)^{-1})$

(2) 群準同型写像 $f \colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to D_6$ であって，

$$([1]_2, [0]_3) \mapsto \sigma^3 \qquad ([0]_2, [1]_3) \mapsto \sigma^2$$

を満たすものが存在する．(このことは証明しなくて良い.) このとき，以下の D_6 の元を σ^m，あるいは $\sigma^m\tau$ $(0 \leq m \leq 5)$ の形で具体的に求めよ：

(2-1) $f(([0]_2, [0]_3))$
(2-2) $f(([1]_2, [2]_3))$

(3) 群準同型写像 $f \colon D_3 \to GL_2(\mathbb{C})$ であって，

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \qquad \tau \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を満たすものが存在する．(このことは証明しなくて良い.) このとき，以下の $GL_2(\mathbb{C})$ の元を具体的に求めよ：

(3-1) $f(\sigma\tau\sigma^2)$
(3-2) $f((\tau\sigma^2\tau)^{-1})$

(4) 群準同型写像 $f \colon \mathfrak{S}_4 \to GL_2(\mathbb{C})$ であって，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

を満たすものが存在する．(このことは証明しなくて良い.) このとき，以下の $GL_2(\mathbb{C})$ の元を具体的に求めよ：

(4-1) $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right)$
(4-2) $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\right)$

(5) 29 で割ると 8 余り，11 で割ると 2 余る整数を 1 つ求めよ．

(6) 15 で割ると 4 余り，77 で割ると 1 余る整数を 1 つ求めよ．

(7) 39 で割ると 20 余り，385 で割ると 15 余る整数を 1 つ求めよ．

解答.

(1-1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

(1-2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

注意 1. 第 8 回レポート課題解答例を参照のこと.

(2-1) e

(2-2) σ

注意 2. (2-2) は

$$\begin{aligned} f(([1]_2, [2]_3)) &= f(([1]_2, [0]_3) + ([0]_2, [1]_3) + ([0]_2, [1]_3)) \\ &= f(([1]_2, [0]_3))f(([0]_2, [1]_3))f(([0]_2, [1]_3)) = \sigma^3\sigma^2\sigma^2 = \sigma^7 = \sigma \end{aligned}$$

と計算される. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の 2 項演算は加法的 $(+)$ なものであることに注意すること.

(3-1) $\begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

(3-2) $\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

(4-1) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

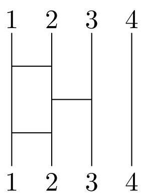
(4-2) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

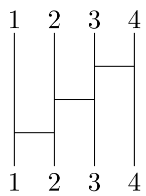
注意 3. (4-1), (4-2) は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad (**)$$

というように, それぞれの元を f による送り先のわかっている $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ らの積で表すことで計算を行うことができる. この表示は “あみだくじ” 方式の対称群の元の表示を用いると計算がしやすい：

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$: 

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$: 

$(*)$, $(**)$ の右辺の 3 つの項がそれぞれ “横棒” に対応している.

(5) 211 (mod 319 で一致していれば良い)

(6) 694 (mod 1155 で一致していれば良い)

(7) 14645 (mod 15015 で一致していれば良い)

注意 4. 第 10 回レポート課題解答例を参照のこと.

□