代数学 I 期末試験

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)

1. 試験時間は 85 分である．
2. 解答は日本語または英語で行うこと．また，どの問の解答であるかを明確に記したうえで解答すること．
3. 名前，学籍番号の書き忘れには十分注意すること．特に解答用紙を 2 枚用いた場合にはその両方に名前，学籍番号が記載されていることを確認すること．記載されていない場合，採点は行わない．
4. 試験終了後，すぐに解答が Scomb および私の個人ホームページにアップロードされるので確認すること．

以下では，

- $\mathfrak{S}_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \middle| \, i_1, i_2, \ldots, i_n \text{は } 1, 2, \ldots, n \text{ の並べ替え} \right\}$ を n 次対称群，
- $D_n = \{e, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{n-1}, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \ldots, \sigma^{n-1}\tau\}$ を n 次 2 面体群，ただし $\sigma^n = e, \tau^2 = e, \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau$，

とする．

問題 1 (各 5 点)**.** 以下の問に答えよ．解答は全て答えのみで良い：

(1) 群準同型写像 $f\colon D_4 \to \mathfrak{S}_4$ であって，

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \tau \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

を満たすものが存在する．このとき，$\mathfrak{S}_4$ の元 $f(\tau\sigma^2\tau\sigma^3\tau)$ を $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ の形で具体的に求めよ．

(2) 群準同型写像 $f\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathfrak{S}_4$ であって，

$$([1]_2, [0]_2) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad ([0]_2, [1]_2) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

を満たすものが存在する．このとき，$\mathfrak{S}_4$ の元 $f(([1]_2, [1]_2))$ を $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ の形で具体的に求めよ．

(3) 群準同型写像 $f\colon \mathfrak{S}_3 \to GL_2(\mathbb{C})$ であって，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

を満たすものが存在する．このとき，$GL_2(\mathbb{C})$ の元 $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right)$ を具体的に求めよ．

(4) 42 で割ると 8 余り，65 で割ると 2 余る整数を 1 つ求めよ．

問題 2 (各 6 点)**.**

(1) $\mathfrak{S}_3$ とその部分群 $H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ に関する以下の問に答えよ．ただし，解答は全て答えのみで良い：

(1-1) $\mathfrak{S}_3$ における H による左剰余類 ($\mathfrak{S}_3/H$ の元) を全て記述せよ．

(1-2) $\mathfrak{S}_3$ の H に関する左完全代表系を 1 つ記述せよ．

(1-3) $\mathfrak{S}_3$ における H の指数 $[\mathfrak{S}_3 : H]$ はいくらか.

(2) G を位数 27 の群とする．全射群準同型 $f\colon G \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ が存在するとき，$\mathrm{Ker}\, f$ の位数を求めよ．ただし，計算過程も説明すること.

(3) $\mathfrak{S}_5$ の各元 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 \end{pmatrix}$ は 1 対 1 写像 $\sigma\colon \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}, k \mapsto i_k =: \sigma(k)$ と考えられため，$X := \{\{i,j\} \mid i,j \in \{1,2,3,4,5\}\}$ としたとき，

$$\mathfrak{S}_5 \times X \to X, (\sigma, \{i,j\}) \mapsto \sigma.\{i,j\} := \{\sigma(i), \sigma(j)\}$$

は X 上の $\mathfrak{S}_5$ の作用を定める．ここで，$\{i,j\}$ は i,j の 2 元からなる集合の意味であり, 特に $\{i,j\} = \{j,i\}$ であることに注意する．また，$\{i,j\} \in X$ は i,j の重複を許す．このとき，以下の問に答えよ．ただし，解答は全て答えのみで良い：

(3-1) $\mathfrak{S}_5$ の $\{2,3\} \in X$ における固定部分群 $(\mathfrak{S}_5)_{\{2,3\}}$ の位数を求めよ.
(3-2) $\mathfrak{S}_5$-軌道 $\mathfrak{S}_5.\{2,3\}$ に含まれる元の個数を求めよ.
(3-3) X における $\mathfrak{S}_5$-軌道の個数を求めよ.

問題 3 (計 22 点)**.** n 次 2 面体群 D_n に関する以下の問に答えよ．ただし，解答は全て答えのみで良い：

(1) $k, \ell \in \{0, 1 \ldots, n-1\}$ とする．このとき，以下の D_n の元 (a)，(b)，(c)，(d) を再び σ^m，あるいは $\sigma^m\tau$ $(m \in \mathbb{Z})$ の形*1で表せ.

(a) $\sigma^k(\sigma^\ell)(\sigma^k)^{-1}$　(b) $\sigma^k(\sigma^\ell\tau)(\sigma^k)^{-1}$　(c) $(\sigma^k\tau)(\sigma^\ell)(\sigma^k\tau)^{-1}$　(d) $(\sigma^k\tau)(\sigma^\ell\tau)(\sigma^k\tau)^{-1}$.

(2) D_4 の共役類を具体的な元を用いてすべて記述せよ.
(3) D_5 の部分群を全て求めよ．また，その中で正規部分群であるものを挙げよ.
(4) D_6 の中心 $Z(D_6)$ を具体的な元を用いて記述せよ.

問題 4 (計 30 点)**.** G を位数 18 の群とする.

$$X := \{\{g_1, g_2, g_3\} \subset G \mid g_1, g_2, g_3 \text{は相異なる } G \text{ の } 3 \text{ 元 }\}$$

としたとき，

$$G \times X \to X, (g, \{g_1, g_2, g_3\}) \mapsto \{gg_1, gg_2, gg_3\}$$

は X 上の G の作用を定める (このことは証明しなくて良い)．このとき，以下の問に答えよ：

(1) X の元の個数を求めよ．解答は答えのみで良い.
(2) 任意の $\{g_1, g_2, g_3\} \in X$ に対し，その固定部分群 $G_{\{g_1,g_2,g_3\}}$ の位数は 3 以下であることを証明せよ.
(3) X 上の G の作用は元の個数が 6 である G-軌道を少なくとも 1 つ持つことを証明せよ.
(4) G は位数 3 の部分群を少なくとも 1 つ持つことを証明せよ.
(5) 9 次 2 面体群 D_9 の位数 3 の部分群を具体的に挙げよ．解答は答えのみで良い.

問題 5 (各 8 点)**.**

(1) 5 で割ると 4 余り，13 で割ると 10 余り，24 で割ると 2 余る整数を 1 つ求めよ.
(2) $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ は同型でないことを証明せよ.
(3) 加法群 $\mathbb{Q}$ と乗法群 $\mathbb{Q}_{>0}$ は同型でないことを証明せよ.
(4) p を素数とする．このとき，位数 p^k(k は 1 以上の整数) の群 G の中心 $Z(G)$ は $Z(G) \neq \{e\}$ となることを証明せよ.

問題は以上である.

*1 m を $0 \leq m \leq n-1$ に取る必要は無い.