代数学 I 中間試験

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)

1. 試験時間は 85 分である．
2. 解答は日本語または英語で行うこと．また，どの問の解答であるかを明確に記したうえで解答すること．
3. 名前，学籍番号の書き忘れには十分注意すること．特に解答用紙を 2 枚用いた場合にはその両方に名前，学籍番号が記載されていることを確認すること．記載されていない場合，採点は行わない．
4. 試験終了後，すぐに解答が Scomb および私の個人ホームページにアップロードされるので確認すること．

以下では，

- $\mathfrak{S}_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \middle| \ i_1, i_2, \ldots, i_n \text{は } 1, 2, \ldots, n \text{ の並べ替え} \right\}$ を n 次対称群，
- $D_n = \{e, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{n-1}, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \ldots, \sigma^{n-1}\tau\}$ を n 次 2 面体群，ただし $\sigma^n = e, \tau^2 = e, \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau$，

とする．

問題 1 (各 4 点)**.** 以下の元を括弧内で指定した形に直せ．解答は答えのみで良い．

(1) $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ の元 $[18]_{15} + [36]_{15} + [100]_{15}$．　　【$[n]_{15}, 0 \le n \le 14$ の形】

(2) $(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^\times$ の元 $[13]_{20}^{-1}$．　　【$[n]_{20}, 0 \le n \le 19$ の形】

(3) $\mathfrak{S}_6$ の元 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$．

【$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}$ の形】

(4) $\mathfrak{S}_7$ の元 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 1 & 7 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$．　　【$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \end{pmatrix}$ の形】

(5) D_6 の元 $\tau\sigma^2\sigma^5\tau^3\sigma^{-3}\tau$．【$\sigma^m$，あるいは$\sigma^m\tau (0 \le m \le 5)$ の形】

(6) D_5 の元 $(\sigma^4\tau\sigma)^{-1}$．【$\sigma^m$，あるいは$\sigma^m\tau (0 \le m \le 4)$ の形】

問題 2 (各 8 点)**.**

(1) $527x + 408y = 34$ を満たす整数の組 (x, y) を全て求めよ．ただし，計算過程も説明すること．

(2) D_3 とその部分群 $T := \{e, \tau\}$ に関する以下の問に答えよ．ただし，解答は全て答えのみで良い．

(2-1) D_3 における T による左剰余類 (D_3/T の元) を全て記述せよ．

(2-2) D_3 における T による右剰余類 ($T\backslash D_3$ の元) を全て記述せよ．

(2-3) D_3 の T に関する左完全代表系を 1 つ記述せよ．

(2-4) D_3 における T の指数 $[D_3 : T]$ はいくらか．

(3) $\mathfrak{S}_4$ の元 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の位数を求めよ．ただし，計算過程も説明すること．

(4) G を巡回群でない位数 10 の群とする．元 $g \in G$ が $g^5 \neq e$ (e は G の単位元) を満たすとき，g の位数を求めよ．ただし，計算過程も説明すること．

問題 3 (各 8 点). 行列群

$$GL_2(\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

を考える. 次の部分集合 G_1, G_2, G_3 が, それぞれ $GL_2(\mathbb{C})$ の

(a) 正規部分群となる　　(b) 部分群となるが正規部分群ではない　　(c) 部分群とならない

のどれになるかを選び, その理由を説明せよ.

(1) $G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} e^{\frac{2m\pi i}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2m\pi i}{n}} \end{pmatrix} \middle| m \in \mathbb{Z} \right\}$.　　(2) $G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| a, b, d \in \mathbb{C}, ad \neq 0 \right\}$.

(3) $G_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad \neq 0, bc = 0 \right\}$.

問題 4 (計 20 点). $\mathfrak{S}_3$ に関する以下の問に答えよ.

(1) $\mathfrak{S}_3$ の部分群を具体的に全て挙げよ. ただし, 解答は答えのみで良い.

(2) (1) で挙げたもののうち, 正規部分群であるものを全て述べ, ぞれぞれについて正規部分群である理由を説明せよ. (※ (1) で数え落としがあっても (2) は独立に採点します.)

問題は以上である.