代数学 I 中間試験予告問題 + 解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

- 代数学 I の成績は中間試験 40 %，期末試験 40 %，レポート 20 %の配分で付けられる．出席等は考慮されない．(『2019 年度代数学 I 履修上の注意』参照.)
- 中間試験の問題は大問が計 4 つで，

  問 1 : 計算問題 (24 点)　問 2 : レポート課題類題(32 点)　問 3 : 予告問題 (24 点)　問 4 : その他 (20 点)

  である．問 1 の計算問題に関しては別プリント『代数学 I 計算練習ドリル』で練習すること．問 2 のレポート課題類題はこれまでのレポート課題から数字のみを少し変えたものである．本プリントは問 3 の予告問題に対応する．本プリントの問 1〜3 の中から 1 問が中間試験の問 3 として出題される．

問題 1

行列群

$$GL_2(\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

を考える．次の部分集合 G_1，G_2，G_3 が，それぞれ $GL_2(\mathbb{C})$ の

(a) 正規部分群となる　　(b) 部分群となるが正規部分群ではない　　(c) 部分群とならない

のどれになるかを選び，その理由を説明せよ．

(1) $G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$.　(2) $G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1 \right\}$.

(3) $G_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$.

なお，行列式 $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ が $g, h \in GL_2(\mathbb{C})$ に対し $\det(gh) = \det(g)\det(h)$ を満たすことは証明なしに用いてよい．

問題 1 解答例.

(1) (c) 部分群とならない．

理由：部分群であるためには任意の G_1 の元に対して，その逆行列も再び G_1 に入っている必要がある．しかし，例えば $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_1$ に対し，その逆行列 $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は $(1/2) \times 1 - 0 \times 0 = 1/2 \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ より，G_1 の元でないため． □

(2) (a) 正規部分群となる．

* *e-mail* : hoya@shibaura-it.ac.jp

理由：$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_2$ より，G_2 は空ではない． 任意の g，$h \in G_2$ に対し，

$$\det(gh) = \det(g)\det(h) = 1 \cdot 1 = 1 \qquad\qquad \det(g^{-1}) = \det(g)^{-1} = 1^{-1} = 1$$

より，$gh \in G_2$ かつ $g^{-1} \in G_2$ である．よって，G_2 は $GL_2(\mathbb{C})$ の部分群である．さらに，任意の $k \in GL_2(\mathbb{C})$，$g \in G_2$ に対し，

$$\det(kgk^{-1}) = \det(k)\det(g)\det(k^{-1}) = \det(k)\det(g)\det(k)^{-1} = \det(k)\det(k)^{-1} = 1$$

なので，$kgk^{-1} \in G_2$ である．よって，G_2 は $GL_2(\mathbb{C})$ の正規部分群となる． □

(3) (b) 部分群となるが正規部分群ではない．

理由：$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_3$ より，G_3 は空ではない．任意の $g, h \in G_3$ に対し，行列の積の定義から gh の各成分も整数であり，さらに $\det(gh) = \det(g)\det(h) = 1 \cdot 1 = 1$ である．よって，$gh \in G_3$．さらに，$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G_3$ に対し，

$$g^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

より g^{-1} の各成分も整数であり，さらに $\det(g^{-1}) = \det(g)^{-1} = 1^{-1} = 1$ である．よって，$g^{-1} \in G_3$．以上より，G_3 は $GL_2(\mathbb{C})$ の部分群である．

一方，例えば $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_3$ に対し，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin G_3 \end{aligned}$$

となる．よって，G_3 は正規部分群とならない． □

問題 1(1) 補足解説. 部分集合 G_1 は行列の積では閉じていて，単位元も含んでいるので，逆元を取る操作で閉じていないことを指摘することになる．$g \in GL_2(\mathbb{C})$ に対し，$\det(g^{-1}) = \dfrac{1}{\det(g)}$ なので，逆行列をとるという操作で集合が閉じるためには，とくに各 $g \in G_2$ に対して，$\det(g)^{-1}$ を行列式に持つような行列を G_1 が含んでいる必要がある．しかし，$\det(g)$ が 1 でない $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ の元である場合，$\det(g)^{-1}$ は整数にはならないので ($\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ は積に関して群をなさない)，そのような g を持ってくれば解答例のように逆元が G_1 に入らない例を構成できる． □

問題 1(2) 補足解説. 空でない G の部分集合 H が G の部分群であることの必要十分条件は，

『任意の $g, h \in H$ に対し，$gh \in H$ かつ $g^{-1} \in H$ となること』

であったので，これを示せば部分群であることが言える．さらに，部分群 H が正規であることの必要十分条件は，

『任意の $h \in H$，$g \in G$ に対し，$ghg^{-1} \in H$ であること』

であったのでこれを言えば正規であることが言える．

部分群 G_2 は**特殊線型群** (special linear group) と呼ばれ，$SL_2(\mathbb{C})$ と普通書かれるものである． □

問題 1(3) 補足解説. 部分群 G_3 は $SL_2(\mathbb{C})$ とよく似ているが各成分が整数であり，整数性も積や逆元を取る操作で閉じていることをちゃんと確認する必要がある．G_3 は $SL_2(\mathbb{Z})$ と書かれる群である．実はこの群は

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

のたった 2 元で生成されることが知られている．一方，これは $GL_2(\mathbb{C})$ における正規部分群ではない．解答例でも用いているが，以下の事実は頭に入れておくと反例の構成に便利である (証明は行列の積の定義から明らかである)：

$t \in \mathbb{C}^\times$ に対し，$n \times n$ 行列 $D_i(t)$ を (i,i) 成分のみ t で残りの対角成分が 1 であるような対角行列

$$D_i(t) := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \text{\huge 0} \\ & & t & & \\ & & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & & 1 \end{pmatrix}$$

とする．(これはここだけの記号.) このとき，$D_i(t)^{-1} = D_i(t^{-1})$ であり，任意の $n \times n$ 行列 g に対し，$D_i(t)gD_i(t)^{-1}$ は，g の i 行目を t 倍，i 列目を t^{-1} 倍した行列となる．

解答例ではこの事実を 2×2 行列の $D_1(1/2)$ に対して用いて，1 行目を 1/2 倍させることで，整数でない成分を作り出している． □

問題 2

行列群

$$GL_2(\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

を考える．次の部分集合 G_1，G_2，G_3 が，それぞれ $GL_2(\mathbb{C})$ の

(a) 正規部分群となる　　(b) 部分群となるが正規部分群ではない　　(c) 部分群とならない

のどれになるかを選び，その理由を説明せよ．

(1) $G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} e^{\frac{2m\pi i}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2m\pi i}{n}} \end{pmatrix} \middle| m \in \mathbb{Z} \right\}$.

(2) $G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| a, b, d \in \mathbb{C}, ad \neq 0 \right\}$.

(3) $G_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad \neq 0, bc = 0 \right\}$.

問題 2 解答例.

(1) (a) 正規部分群となる．

理由：G_1 は定義より明らかに空ではない．さらに，各 $m, m' \in \mathbb{Z}$ に対し，

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{2m\pi i}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2m\pi i}{n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{2m'\pi i}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2m'\pi i}{n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{2(m+m')\pi i}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2(m+m')\pi i}{n}} \end{pmatrix} \in G_1$$

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{2m\pi i}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2m\pi i}{n}} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{2m\pi i}{n}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2m\pi i}{n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{2(-m)\pi i}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2(-m)\pi i}{n}} \end{pmatrix} \in G_1$$

となるので，G_1 は $GL_2(\mathbb{C})$ の部分群である．次に任意の $g \in GL_2(\mathbb{C})$，$m \in \mathbb{Z}$ に対し，

$$g \begin{pmatrix} e^{\frac{2m\pi i}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2m\pi i}{n}} \end{pmatrix} g^{-1} = e^{\frac{2m\pi i}{n}} \cdot \left(g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g^{-1} \right) = e^{\frac{2m\pi i}{n}} \cdot (gg^{-1}) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2m\pi i}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2m\pi i}{n}} \end{pmatrix} \in G_1$$

である．よって，G_1 は $GL_2(\mathbb{C})$ の正規部分群となる． $\square$

(2) (b) 部分群となるが正規部分群ではない．

理由：$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \in G_2$ より，G_2 は空ではない．任意の $g, h \in G_2$ に対し，$g = \begin{pmatrix}a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}$，$h = \begin{pmatrix}a' & b'\\ 0 & d'\end{pmatrix}$ とすると，

$$gh = \begin{pmatrix}a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a' & b'\\ 0 & d'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}aa' & ab'+bd'\\ 0 & dd'\end{pmatrix}$$

であり，$(aa')(dd') = (ad)(a'd') \neq 0$ なので，$gh \in G_2$．さらに，$g^{-1} = \dfrac{1}{ad}\begin{pmatrix}d & -b\\ 0 & a\end{pmatrix}$ より，$g^{-1} \in G_2$．以上より，G_2 は $GL_2(\mathbb{C})$ の部分群である．

一方，例えば $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \in G_2$ に対し，

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix} \notin G_2$$

となる．よって，G_2 は正規部分群とならない． $\square$

(3) (c) 部分群とならない．

理由：部分群であるためには任意の $g, h \in G_3$ の元に対して，$gh \in G_3$ である必要がある．しかし，例えば $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} \in G_3$ に対し，

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

となり，これは $1 \cdot 1 \neq 0$ より，G_3 の元でないため． $\square$

問題 2(1) 補足解説． $e^{2\pi i} = 1$ より，G_1 は位数 n の有限群である．(位数 n の元 $\begin{pmatrix}e^{\frac{2\pi i}{n}} & 0\\ 0 & e^{\frac{2\pi i}{n}}\end{pmatrix}$ によって生成される巡回群である.) なお，解答例と全く同じ方法で，

$$\left\{ \begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{C}^{\times} \right\}$$

の部分群は全て正規部分群であることが証明される． $\square$

問題 2(2) 補足解説． G_2 は**上三角行列**のなす部分群と呼ばれる．これは解答例にあるように，正規部分群にはならない． $\square$

問題 2(3) 補足解説． G_3 の条件 $bc = 0$ は『$b = 0$ または $c = 0$』と同値なので，

$$G_3 = \left\{ \begin{pmatrix}a & b\\ 0 & d\end{pmatrix} \middle| a, b, d \in \mathbb{C}, ad \neq 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix}a & 0\\ c & d\end{pmatrix} \middle| a, c, d \in \mathbb{C}, ad \neq 0 \right\}$$

である．右辺の 2 つに分けた集合のそれぞれは問題 2(2) で見たように部分群になるが，和集合は部分群ではない．この部分集合は単位元を含んでいて，逆元をとるという操作では閉じているので，行列の積で閉じないことを指摘することになる． $\square$

問題 3

行列群

$$GL_2(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

を考える．次の部分集合 G_1，G_2，G_3 が，それぞれ $GL_2(\mathbb{R})$ の

(a) 正規部分群となる　　(b) 部分群となるが正規部分群ではない　　(c) 部分群とならない

のどれになるかを選び，その理由を説明せよ．

(1) $G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc > 0 \right\}$．　(2) $G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \geq 1 \right\}$．

(3) $G_3 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\}$．

なお，行列式 $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ が $g, h \in GL_2(\mathbb{R})$ に対し $\det(gh) = \det(g)\det(h)$ を満たすことは証明なしに用いてよい．

問題 3 解答例．

(1) (a) 正規部分群となる．

理由：$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_1$ より，G_1 は空ではない．任意の $g, h \in G_1$ に対し，

$$\det(gh) = \det(g)\det(h) > 0 \qquad\qquad \det(g^{-1}) = \det(g)^{-1} > 0$$

より，$gh \in G_1$ かつ $g^{-1} \in G_1$ である．よって，G_1 は $GL_2(\mathbb{R})$ の部分群である．さらに，任意の $k \in GL_2(\mathbb{R})$，$g \in G_1$ に対し，

$$\det(kgk^{-1}) = \det(k)\det(g)\det(k^{-1}) = \det(k)\det(g)\det(k)^{-1} = \det(g) > 0$$

なので，$kgk^{-1} \in G_1$ である．よって，G_1 は $GL_2(\mathbb{R})$ の正規部分群となる．　□

(2) (c) 部分群とならない．

理由：部分群であるためには任意の G_2 の元に対して，その逆行列も再び G_2 に入っている必要がある．しかし，例えば $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_2$ に対し，その逆行列 $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は $(1/2) \times 1 - 0 \times 0 = 1/2 < 1$ より，G_2 の元でないため．　□

(3) (b) 部分群となるが正規部分群ではない．

理由：G_3 は定義より明らかに空ではない．各 $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' & -\cos\theta\sin\theta' - \sin\theta\cos\theta' \\ \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' & -\sin\theta\sin\theta' + \cos\theta\cos\theta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} \in G_3\end{aligned}$$

である (最後の等式は三角関数の加法定理より従う)．また，各 $\theta \in \mathbb{R}$ に対し，$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$，$\cos\theta = \cos(-\theta)$，$\sin\theta = -\sin(-\theta)$ より，

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \in G_3$$

である．これらより，G_3 は $GL_2(\mathbb{R})$ の部分群である．

一方，例えば $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \in G_3$ $(\theta = \pi/4)$ に対し，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1/2\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となり，$(1,2)$ 成分と $(2,1)$ 成分が -1 倍の関係ではないため，特にこれは G_3 の元ではない．よって，G_3 は正規部分群とならない． $\square$

問題 3(1) 補足解説． 本問は問題 2，3 とは違い，$GL_2(\mathbb{R})$ の部分集合を考えていることに注意する．本問の G_1 は $GL_2(\mathbb{R})$ の正規部分群であるが，$GL_2(\mathbb{C})$ の正規部分群ではない．例えば問題 2(3) の補足解説にある方法で $D_1(i)$ を左から，$D_1(-i)$ を右からかけることで，1 行目を i 倍，1 列目を $-i$ 倍することができ，そうすると行列式の条件は保ったまま実数でない成分を持つ行列になる． $\square$

問題 3(2) 補足解説． 部分集合 G_2 は行列の積では閉じていて，単位元も含んでいるので逆元をとる操作で閉じていないことを指摘することになる．考え方は問題 1(1) と同じである． $\square$

問題 3(3) 補足解説． この部分群 G_3 は**回転群**，あるいは**特殊直交群**と呼ばれ，$SO_2(\mathbb{R})$ と書かれる．ちなみに，2 以上の整数 n に対して，

$$SO_n(\mathbb{R}) := \{g \in GL_n(\mathbb{R}) \mid g^T g = I_n, \det g = 1\}$$

と定義される．ただし，g^T は g の転置，I_n は n 次単位行列である．($n = 2$ のときこの定義と G_3 の定義が一致していることを確かめよ．) これは正規部分群ではない $GL_n(\mathbb{R})$ の部分群である． $\square$