代数学 I 第 6 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

5.1 n 次対称群 (補足)

n を 2 以上の整数とし，$\mathfrak{S}_n$ を n 次対称群とする．$\mathfrak{S}_n$ の単位元を e と書く．以下では $\mathfrak{S}_n$ における二項演算の記号 $\circ$ はしばしば省略する (つまり，$\sigma_1 \circ \sigma_2$ を単に $\sigma_1\sigma_2$ と書いたりする).

復習 (第 5 回講義資料：巡回置換，互換)

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ が，ある $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ に対して，

$$\sigma(i_s) = \begin{cases} i_{s+1} & s = 1, \dots, k-1 \text{ のとき}, \\ i_1 & s = k \text{ のとき}, \end{cases} \qquad \sigma(j) = j,\ j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\} \text{ のとき},$$

を満たすとき，σ を**巡回置換 (cyclic permutation)** といい，$\sigma = (i_1 \cdots i_k)$ と書く．特に $k = 2$，つまり，$(i_1\ i_2)$ の形の元を**互換 (transposition)** といい，$(i\ i+1)$ の形の互換を**隣接互換 (adjacent transposition)** という．

以下は，定義から容易に導かれる巡回置換の基本性質である．

命題 5.1

巡回置換 $(i_1\ i_2 \cdots i_k) \in \mathfrak{S}_n$ に対し，以下が成立：

(1) $(i_1\ i_2 \cdots i_k)^{-1} = (i_k \cdots i_2\ i_1)$.
(2) $(i_1\ i_2 \cdots i_k)^k = e$.

巡回置換 $\sigma = (i_1 \cdots i_k) \in \mathfrak{S}_n$ に対し，

$$S(\sigma) \coloneqq \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$$

とする．また単位元 e に対し，$S(e) \coloneqq \emptyset$ とする．[*1] 例えば，$S((4\ 6\ 7)) = \{4, 6, 7\}, S((2\ 4\ 1)) = \{1, 2, 4\}$ である．

定義 5.2

$\mathfrak{S}_n$ 内の巡回置換の組 $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ が

$$\text{任意の } t \neq t' \text{ に対し，} S(\sigma_t) \cap S(\sigma_{t'}) = \emptyset$$

を満たすとする．このとき $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ は**どの 2 つも互いに素**であると言われる．

例えば，$(2\ 4), (1\ 5), (3\ 6\ 8)$ はどの 2 つも互いに素な巡回置換である．以下は巡回置換の定義から容易にわかる．

* *e-mail* : hoya@shibaura-it.ac.jp

[*1] これはこの講義だけの記号である．

命題 5.3

$\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ を $\mathfrak{S}_n$ 内のどの 2 つも互いに素な巡回置換とする．このとき，

$$(\sigma_1 \cdots \sigma_s)(i) = \begin{cases} \sigma_t(i) & \text{ある } t \text{ について } i \in S(\sigma_t) \text{ となるとき，} \\ i & \text{全ての } t = 1, \ldots, s \text{ に対して，} i \notin S(\sigma_t) \text{ のとき，} \end{cases}$$

となる．特に，σ と σ' が互いに素な巡回置換のとき，それらは可換，つまり，

$$\sigma\sigma' = \sigma'\sigma$$

である．

以下の定理は重要であるが，厳密な証明は補足プリント “巡回置換について” に回す．(2) は任意の $\mathfrak{S}_n$ の元に対して対応する『あみだくじ』があることを保証するものであり，内容としては “納得” しやすいであろう (第 5 回講義資料 p.3–4 の注意 (対称群とあみだくじの関係) 参照)．(1) については下の例 1 を参照のこと．

定理 5.4

n を 2 以上の整数とする．各 $i = 1, \ldots, n-1$ に対し $s_i := (i\ i+1) \in \mathfrak{S}_n$ とする．このとき，以下が成立する：

(1) 任意の $\mathfrak{S}_n$ の単位元でない元はどの 2 つも互いに素な巡回置換の合成として書かれる．さらに，長さ 1 の巡回置換 (=単位元) を用いないことにすると，合成の順序の違いを除いてこの表示は一意的である．
(2) 任意の $\mathfrak{S}_n$ の元は隣接互換 $s_i, i = 1, \ldots, n-1$ らの合成として書かれる．

定理 5.4(2) においては，(1) のような表示の一意性が成り立たないことに注意する．例えば，$\mathfrak{S}_3$ において，

$$s_1 s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = s_2 s_1 s_2 = s_1 s_1 s_2 s_1 s_2 = \cdots .$$

である．これは，各対称群の元に対して，対応するあみだくじは 1 通りではないという事実に対応する．

例 1. 定理 5.4(1) を証明する代わりに，以下の例でどのようにすれば任意の $\mathfrak{S}_n$ の元をどの 2 つも互いに素な巡回置換の積として書くことができるのかを見て，定理 5.4(1) の正しさを “納得” しよう．実際に，厳密な証明も以下の方法を一般的な言葉に置き換えるだけである．

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 2 & 8 & 7 & 6 & 9 & 1 & 5 & 10 & 3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_{10}$$

とする．まず 1 をとる (これは実際には 1 でなくても何でも良い)．1 の σ による像を次々に計算する:

$$1 \overset{\sigma}{\mapsto} 4 \overset{\sigma}{\mapsto} 7 \overset{\sigma}{\mapsto} 1$$

上のように初めに取った 1 に戻ってきたところでストップする (必ず初めの数字にいつか戻る)．次に，上の過程で現れていない数字を任意にとる．ここでは 2 を取る．そして，上と同様に 2 の σ による像を計算する：

$$2 \overset{\sigma}{\mapsto} 2$$

これは，1 回で初めに取った数字に戻ってくる (つまり動かさない) のでここでストップする．さらに，上の過程でまだ今まで一度も出てきてない数字を任意にとる．ここでは 3 をとる．そして，上と同様に 3 の σ による像を次々に計算する：

$$3 \overset{\sigma}{\mapsto} 8 \overset{\sigma}{\mapsto} 5 \overset{\sigma}{\mapsto} 6 \overset{\sigma}{\mapsto} 9 \overset{\sigma}{\mapsto} 10 \overset{\sigma}{\mapsto} 3$$

同様に初めに取った 3 に戻ってくるのでそこでストップする．ここで，$1, \ldots, 10$ の全ての数が出そろったので，以上の反復の過程をストップする．

以上の過程で出てきた数字のサイクルをその順に並べて巡回置換を作り，その合成をとる．

$$(1\ 4\ 7)(2)(3\ 8\ 5\ 6\ 9\ 10) = (1\ 4\ 7)(3\ 8\ 5\ 6\ 9\ 10)$$

すると，こうして得られる巡回置換たちはその作り方から (どの 2 つも) 互いに素であり，さらに命題 5.3 から写像として σ と一致する．よって，

$$\sigma = (1\ 4\ 7)(3\ 8\ 5\ 6\ 9\ 10)$$

であり，確かに σ を互いに素な巡回置換の合成として書くことができた．

上記の方法は任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して通用する方法である．

5.2 抽象的な部分群の構成

群論の一般論に戻ろう．これまで，様々な群と部分群を見てきたが，群が与えられたときにその部分群を構成するいくつかの一般論について説明を行う．以下では，G を群とし，その単位元を e と書く．さらに，$g, h \in G$ に対し，それらの二項演算による像を単に gh と書き (つまり，二項演算の記号 $\cdot$ や $\circ$ 等は省略する)，g と h を『掛ける』という言い方をすることにする．

5.2.1 自明な部分群

まず，面白いものではないが忘れてはいけないものとして，

- 単位元のみからなる G の部分集合 $\{e\}$
- G 自身

はどちらも G の部分群である．これらを G の**自明な部分群**という．

5.2.2 部分集合の生成する部分群

定義 5.5

S を群 G の任意の部分集合とする (部分群とは限らない)．このとき，

$$\langle S \rangle \coloneqq \{g_1^{m_1} \cdots g_k^{m_k} \mid g_i \in S, m_i \in \mathbb{Z}\ (i = 1, \ldots, k), k \in \mathbb{N}\} (\subset G)$$

とする．言葉で書くと，$\langle S \rangle$ は『S の元とその逆元たちを何度も掛けてできるもの全てを集めてきてできる集合』となる．このとき，$\langle S \rangle$ は定義から明らかに二項演算と逆元を取る操作で閉じており，G の部分群となる．これを，S **で生成される部分群**という．

例えば，S が $S = \{a, b, c\}$ という 3 つの元からなる集合であった場合，$\langle S \rangle$ は

$$e(= a^0),\ a,\ ab^2,\ ac^2b^{-3}a,\ b^4c^{-2}a^{-1}b^2c^4b^2c^{-6}a,\ c^{-2}, \cdots$$

などをとにかく全て集めてきてできる集合である．こう考えると，二項演算と逆元を取る操作で閉じているということは自明であろう (例えば，ab^2 と $ac^2b^{-3}a$ を掛けてできる元は $ab^2ac^2b^{-3}a$ なのでやはり $\langle S \rangle$ の元であり，$b^4c^{-2}a^{-1}b^2c^4b^2c^{-6}a$ の逆元 $a^{-1}c^6b^{-2}c^{-4}b^{-2}ac^2b^{-4}$ も $\langle S \rangle$ の元である)．

ここで，S を含む部分群があるとすれば，二項演算と逆元を取る操作で閉じていないといけないことから，それは上記のような $\langle S \rangle$ という集合を必ず含んでいるはずである．よって，$\langle S \rangle$ は S **を含む部分群で最小のもの**である．

例 2.

(1) $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}\} \subset \mathfrak{S}_n$ としたとき，定理 5.4(2) より，

$$\langle S \rangle = \mathfrak{S}_n$$

である．

(2) $D_n = \{e, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{n-1}, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \ldots, \sigma^{n-1}\tau\}$ を n 次二面体群とする ($n \geq 3$, 第 5 回講義資料例 3 と同じ記号を用いる)．このとき，具体的な群の元の形より明らかに，

$$\langle\{\sigma, \tau\}\rangle = D_n$$

である．また，D_n において，

$$\langle\{\sigma\}\rangle = \{\sigma^m \mid m \in \mathbb{Z}\} = \{e, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{n-1}\}$$

である．

例 2 の (2) の後半の例のように，G の 1 元からなる部分集合 $\{g\}$ で生成される部分群は，

$$\langle\{g\}\rangle = \{g^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

となる．これを単に $\langle g\rangle$ と書く．$g^m g^{m'} = g^{m+m'} = g^{m'} g^m$ なので $\langle g\rangle$ は可換群である．また，一般に $\langle g\rangle = \langle g^{-1}\rangle$.

定義 5.6

ある $g \in G$ が存在して，$G = \langle g\rangle$ となるとき，G を**巡回群 (cyclic group)** といい，g を G の**生成元 (generator)** という．

上の考察より，巡回群は可換群である．また，生成元の取り方は 1 つとは限らない ($\langle g\rangle = \langle g^{-1}\rangle$ なので，g が生成元であれば少なくとも g^{-1} は生成元である)．

定義 5.7

各 $g \in G$ に対し，G の部分群 $\langle g\rangle$ の位数を g **の位数 (order)** といい，$\operatorname{ord} g$ と書く．

一般に，$\langle g\rangle = \langle g^{-1}\rangle$ なので，$\operatorname{ord} g = \operatorname{ord} g^{-1}$ である．ここで，『位数』という用語が群論において 2 通り現れたことに注意しよう．G の位数 (=G の集合としての元の個数) と，G の元 g の位数 (上で定義したもの) という概念があるのである．以下の命題は定義からすぐにわかる．

命題 5.8

群 G の元 g に対し，以下の同値関係が成立する：

- $\operatorname{ord} g = 1 \Leftrightarrow g = e$.
- $\operatorname{ord} g = \#G \Leftrightarrow G$ は巡回群で，その生成元は g.

例 3.

- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle [1]_n\rangle$ であるので，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は巡回群であり，$[1]_n$ は $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の生成元である．ここで，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ においては，二項演算が $+$ であることに注意．$\operatorname{ord}[1]_n = n$.
- $\mathbb{Z} = \langle 1\rangle$ であるので，$\mathbb{Z}$ は巡回群であり，1 は $\mathbb{Z}$ の生成元である．ここで，$\mathbb{Z}$ においては，二項演算が $+$ であることに注意．$\operatorname{ord} 1 = \infty$.
- $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し，$\mathbb{C}^\times$ の部分群 $\mu_n := \{e^{\frac{2m\pi}{n}i} \mid m \in \mathbb{Z}\}$ を考える． このとき，$\mu_n = \langle e^{\frac{2\pi}{n}i}\rangle$ であるので，μ_n は巡回群であり，$e^{\frac{2\pi}{n}i}$ は μ_n の生成元である．$\operatorname{ord} e^{\frac{2\pi}{n}i} = n$.
- $n \geq 3$ のとき，二面体群 D_n は非可換群なので，D_n は特に巡回群ではない．例 2 (2) より，D_n において，$\operatorname{ord}\sigma = n$ である．また，

  $$\langle\tau\rangle = \{\tau^m \mid m \in \mathbb{Z}\} = \{e, \tau\}$$

  より，$\operatorname{ord}\tau = 2$ である．

群の元 g の位数 $\operatorname{ord} g$ の計算は以下の命題を頭に置いておくとやりやすい．

命題 5.9

群 G の元 g に対し，$\operatorname{ord} g$ は $g^m = e$ となる最小の正の整数 m である．ただし，$g^m = e$ となる正の整数が存在しないとき，$\operatorname{ord} g = \infty$ である．

証明. $\operatorname{ord} g = \#\langle g \rangle < \infty$ のとき，ある $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}, m_1 < m_2$ が存在して，

$$g^{m_1} = g^{m_2}$$

となる．このとき，両辺に g^{-m_1} を掛けると，

$$e = g^{m_2 - m_1}$$

なので，$g^m = e$ となる正の整数 m は少なくとも 1 つは存在することがわかる．このうち最小のものを ℓ とすると，

$$\langle g \rangle = \{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{e, g, \ldots, g^{\ell-1}\}$$

である．いま示すべきことは，$\ell = \operatorname{ord} g$ なので，あとは $e, g, \ldots, g^{\ell-1}$ が全て異なる元であることを示せばよい．もし，$g^{k_1} = g^{k_2}$ $(0 \leq k_1 < k_2 \leq \ell - 1)$ となったとすると，両辺に g^{-k_1} を掛けることで，$e = g^{k_2 - k_1}$ となるが，$0 < k_2 - k_1 \leq \ell - 1$ なので，これは ℓ の最小性に矛盾する．よって，$0 \leq k_1 < k_2 \leq \ell - 1$ のとき $g^{k_1} = g^{k_2}$ とはならない．よって，$\ell = \operatorname{ord} g$ であることが示された．

また，上の議論により，$\operatorname{ord} g < \infty$ のとき，$g^m = e$ となる正の整数は存在するので，$g^m = e$ となる正の整数が存在しないのであれば，$\operatorname{ord} g = \infty$ である． □

例 4. 巡回置換 $(i_1\ i_2 \cdots i_k) \in \mathfrak{S}_n$ に対し，

$$(i_1\ i_2 \cdots i_k)^m \neq e\ (1 \leq m \leq k-1) \qquad (i_1\ i_2 \cdots i_k)^k = e$$

である．(前半は定義より容易にわかる．例えば，i_1 の行き先を考えれば良い．後半は命題 5.1 (2)．) よって，$(i_1\ i_2 \cdots i_k)^m = e$ となる最小の整数は k である．よって，

$$\operatorname{ord}(i_1\ i_2 \cdots i_k) = k. \tag{$*$}$$

一般に $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ をどの 2 つも互いに素な巡回置換とする．このとき，命題 5.3 の互いに素な巡回置換の可換性より，各 $m \in \mathbb{Z}$ に対し，

$$(\sigma_1 \cdots \sigma_s)^m = \sigma_1^m \cdots \sigma_s^m$$

が成立する．このことから，$\#S(\sigma_1), \ldots, \#S(\sigma_s)$ の最小公倍数を ℓ とすると，$(*)$ より，

$$\operatorname{ord}(\sigma_1 \cdots \sigma_s) = \ell$$

である．例えば，例 1 で扱った $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 2 & 8 & 7 & 6 & 9 & 1 & 5 & 10 & 3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_{10}$ を考えると，

$$\sigma = (1\ 4\ 7)(3\ 8\ 5\ 6\ 9\ 10)$$

であり，$\#S((1\ 4\ 7)) = 3, \#S((3\ 8\ 5\ 6\ 9\ 10)) = 6$ なので，

$$\operatorname{ord} \sigma = 6$$

である．実際，$\sigma^6 = (1\ 4\ 7)^6 (3\ 8\ 5\ 6\ 9\ 10)^6 = e \cdot e = e$ である．

5.2.3 中心，中心化群

定義 5.10

群 G に対し，

$$Z(G) \coloneqq \{z \in G \mid zg = gz,\ \forall g \in G\}$$

とする．言葉で書くと，$Z(G)$ は『G の全ての元と可換性を持つ元全てを集めてきてできる集合』である．
このとき，$Z(G)$ は G の部分群となり (証明は以下)，G の**中心 (center)** と呼ばれる[*2]．
より一般に，S を群 G の任意の部分集合とする (部分群とは限らない)．このとき，

$$Z(S) \coloneqq \{z \in G \mid zs = sz,\ \forall s \in S\}$$

とする．言葉で書くと，$Z(S)$ は『S の全ての元と可換性を持つ元全てを集めてきてできる集合』となる．
このとき，$Z(S)$ は G の部分群となり，G における S **の中心化群 (centralizer)** と呼ばれる．

命題 5.11

群 G とその部分集合 S に対し，S の中心加群 $Z(S)$ は G の部分群である．

証明. まず，単位元の定義より $es = s = se,\ \forall s \in S$ なので，$e \in Z(S)$ であり，とくに $Z(S) \neq \emptyset$ である．
さらに $z_1, z_2 \in Z(S)$ と任意の $s \in S$ に対し，

$$\begin{aligned}&(z_1z_2)s = z_1(z_2s) = z_1(sz_2) = (z_1s)z_2 = (sz_1)z_2 = s(z_1z_2),\\ &z_1^{-1}s = z_1^{-1}sz_1z_1^{-1} = z_1^{-1}z_1sz_1^{-1} = sz_1^{-1}.\end{aligned}$$

となるので，$z_1z_2, z_1^{-1} \in Z(S)$．よって，二項演算と逆元を取る操作について閉じているので，$Z(S)$ は G の部分群である． □

例 5.

- 一般の群 G に対し，
$$Z(\{e\}) = \{z \in G \mid ze = ez\} = G$$
である．
- $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 又は $\mathbb{C}$ のとき，
$$Z(GL_2(\mathbb{K})) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{K}^\times \right\}$$
である．これは以下のように確かめられる：
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{K})$ で $b \neq 0$ 又は $c \neq 0$ のとき，
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ c & d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2a & b \\ 2c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
となるので，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \notin Z(GL_2(\mathbb{K}))$．よって，$Z(GL_2(\mathbb{K}))$ の元は $b = c = 0$ を満たす対角行列．
次に，$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{K})$ で $a \neq d$ のとき，
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d \\ 0 & d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[*2] $Z(G)$ の Z はドイツ語の Zentrum に由来．

となるので，$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \notin Z(GL_2(\mathbb{K}))$．よって，$Z(GL_2(\mathbb{K}))$ の元は $a = d$ を満たす正則な対角行列，つまり単位行列の 0 でない定数倍の形をしているもののみ．逆に，単位行列の 0 でない定数倍が任意の $GL_2(\mathbb{K})$ の元と可換であることは容易にわかるので，結局 $Z(GL_2(\mathbb{K})) = \{aI_2 \mid a \in \mathbb{K}^\times\}$ である．同様の方法で，

$$Z(GL_n(\mathbb{K})) = \{aI_n \mid a \in \mathbb{K}^\times\}$$

であることがわかる．

- $n \geq 3$ のとき，

$$Z(\mathfrak{S}_n) = \{e\}$$

である．これは以下のように確かめられる：

$\mathfrak{S}_n$ の単位元でない元 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ を取ってくると，

(i) ある $k = 1, \ldots, \underline{n-1}$ が存在して，$k \neq i_k$ かつ $k+1 \neq i_k$ となる，

(ii) ある $k = 1, \ldots, \underline{n-1}$ が存在して $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & k-1 & k & \cdots & n-1 & n \\ 1 & \ldots & k-1 & k+1 & \cdots & n & k \end{pmatrix}$

のいずれかが成立する (理由を考えよ)．(i) のとき，

$$\left((k\ k+1) \circ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_k & \cdots & i_n \end{pmatrix}\right)(k) = i_k,$$
$$\left(\begin{pmatrix} 1 & \cdots & k+1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_{k+1} & \cdots & i_n \end{pmatrix} \circ (k\ k+1)\right)(k) = i_{k+1},$$

となるので，

$$(k\ k+1) \circ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \circ (k\ k+1).$$

これより，$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \notin Z(\mathfrak{S}_n)$．(ii) で $k = 1$ のとき，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} = (1\ 2\ \cdots\ n)$$

であるが，このとき，n が 3 以上であることに注意すると，

$$((1\ 2) \circ (1\ 2\ \cdots\ n))(2) = 3 \quad ((1\ 2\ \cdots\ n) \circ (1\ 2))(2) = 2$$

より，$(1\ 2) \circ (1\ 2\ \cdots\ n) \neq (1\ 2\ \cdots\ n) \circ (1\ 2)$ なので，$(1\ 2\ \cdots\ n) \notin Z(\mathfrak{S}_n)$．(ii) で $k > 1$ のとき，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} = (k\ k+1\ \cdots\ n)$$

であるが，このとき，

$$((k-1\ k) \circ (k\ k+1\ \cdots\ n))(k) = k+1 \quad ((k\ k+1\ \cdots\ n) \circ (k-1\ k))(k) = k-1$$

より，$(k-1\ k) \circ (k\ k+1\ \cdots\ n) \neq (k\ k+1\ \cdots\ n) \circ (k-1\ k)$ なので，$(k\ k+1\ \cdots\ n) \notin Z(\mathfrak{S}_n)$．

以上より，$Z(\mathfrak{S}_n)$ に含まれる元は単位元のみである．

ちなみに一般に中心を求める簡単な方法があるというわけではなく，その都度上のように “頑張って” 求める必要がある．