代数学 I 第 9 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

8.1 正規部分群，剰余群

G を群，$e \in G$ をその単位元とする．H を G の部分群としたとき，$g \in G$ の H による左剰余類 gH と右剰余類 Hg は一般には異なっていた．しかし，H の取り方によってはこれらが全て一致することがある．今回はそのような部分群に着目する．

定義 8.1

H を G の部分群とする．任意の $g \in G$ に対して，

$$gH = Hg$$

が成立するとき，H を G の**正規部分群 (normal subgroup)** という．

例を見る前に定義からわかる命題を一つ述べておこう．これは与えられた群が正規部分群であるかどうかをチェックする際に便利である：

命題 8.2

H を G の部分群とする．以下の (1), (2), (3) は同値である．

(1) H は正規部分群である．
(2) 任意の $g \in G$ に対して，$gHg^{-1} = H$ が成立する．ただし，$gHg^{-1} := \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$ とする．
(3) 任意の $g \in G$ と $h \in H$ に対して，$ghg^{-1} \in H$ である．

証明.

(1) $\Rightarrow$ (2) 正規部分群の定義より，任意の $g \in G$ と $h \in H$ に対して，$gh \in gH = Hg$ なので，$ghg^{-1} \in H$．よって，任意の $g \in G$ に対して，$gHg^{-1} \subset H$．ここで $g \in G$ は任意であるので，今の g を g^{-1} に取り替えても良く，$g^{-1}Hg \subset H$ も成立する．これより，任意の $h \in H$ に対して，$g^{-1}hg \in H$ であるので，$h = g(g^{-1}hg)g^{-1} \in gHg^{-1}$ である．よって，$gHg^{-1} \supset H$ も言える．以上より，任意の $g \in G$ に対して，$gHg^{-1} = H$ である．

(2) $\Rightarrow$ (1) 任意の $g \in G$ と $h \in H$ に対し，$ghg^{-1} \in H$ なので，$gh \in Hg$．よって，$gH \subset Hg$．ここで (2) の条件において $g \in G$ は任意であるので，任意の $g \in G$ に対して $g^{-1}Hg = H$ も成立していることに注意すると，任意の $g \in G$ と $h \in H$ に対し，$g^{-1}hg \in H$ も成立し，$hg \in gH$ となる．よって，$gH \supset Hg$ も成立する．以上より，任意の $g \in G$ に対して，$gH = Hg$ であることがわかる．

(2) $\Rightarrow$ (3) これは意味を考えれば自明である．

(3) $\Rightarrow$ (2) 条件 (3) は『任意の $g \in G$ に対し，$gHg^{-1} \subset H$』ということに他ならないので，この条件を仮定すると『任意の $g \in G$ に対し，$gHg^{-1} \supset H$』も成立するということを示せばよい．しかしこれは，(1) $\Rightarrow$ (2) の証明内で証明した事実に他ならない． $\square$

例 1. G を可換群，H をその部分群とすると，任意の $g \in G$ に対し，$gH = Hg$ が成立するので，H は正規部分群である．可換群の任意の部分群は正規部分群なのである．

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

例 2. $D_3 = \{e, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau\}$ を 3 次二面体群とする ($\sigma^3 = e, \tau^2 = e, \sigma^k\tau = \tau\sigma^{-k}$ $(k \in \mathbb{Z})$)．$H \coloneqq \langle \tau \rangle = \{e, \tau\} \subset D_3$ とすると，

$$\sigma H = \{\sigma, \sigma\tau\} \qquad\qquad H\sigma = \{\sigma, \tau\sigma\} = \{\sigma, \sigma^{-1}\tau\} = \{\sigma, \sigma^2\tau\}$$

となるので $\sigma H \neq H\sigma$．よって，H は正規部分群ではない．

一方，$N \coloneqq \langle \sigma \rangle = \{e, \sigma, \sigma^2\}$ とすると，

$$\tau N = \{\tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2\} = \{\tau, \sigma^{-1}\tau, \sigma^{-2}\tau\} = \{\tau, \sigma^2\tau, \sigma\tau\} \qquad\qquad N\tau = \{\tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau\}$$

となるので，$\tau N = N\tau$ である．さらに，$D_3 = N \cup \tau N = N \cup N\tau$ なので，D_3 の元 g は『$g \in N$ 又は $g \in \tau N = N\tau$』を満たし，

$$\begin{cases} g \in N \text{ のとき，} gN = N = Ng \\ g \in \tau N = N\tau \text{のとき，} gN = \tau N = N\tau = Ng \end{cases}$$

となる．よって，N は D_3 の正規部分群である．

なお，N が D_3 の正規部分群であることは，以下の一般的な命題の帰結であるとも言える．(実際にはこの命題の証明は上の証明をそのまま一般化して書いたものである．)

命題 8.3

群 G における指数が 2 であるような部分群 N は正規部分群となる．

証明. $(G : N) = 2$ のとき，G において N による左・右剰余類はそれぞれ 2 つとなる．そのうち 1 つは $eN = N = Ne$ なので，$g_0 \notin N$ なる G の元をとると，G の左・右剰余類への分割は

$$G = N \cup g_0N = N \cup Ng_0$$

となる．ここで，$N \cap g_0N = N \cap Ng_0 = \emptyset$ であることに注意すると，$g_0N = G \setminus N = Ng_0$ であることがわかる．($G \setminus N$ は商空間ではなく G における N の補集合の意味.) このとき，G の各元 g は『$g \in N$ 又は $g \in g_0N = Ng_0$』を満たし，

$$\begin{cases} g \in N \text{ のとき，} gN = N = Ng \\ g \in g_0N = Ng_0 \text{のとき，} gN = g_0N = Ng_0 = Ng \end{cases}$$

となる．よって，N は G の正規部分群である． □

例 3. n を正の整数とし，$\mathbb{K}$ を $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．一般線型群

$$GL_n(\mathbb{K}) \coloneqq \{A \mid A \text{ は } \mathbb{K} \text{ の元を成分とする } n \times n \text{ 行列で，} \det A \neq 0\}$$

を考える (ただし，$\det A$ は A の行列式．二項演算は行列の積であった．) このとき，$GL_n(\mathbb{K})$ の部分群

$$SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in GL_n(\mathbb{K}) | \det A = 1\}$$

(特殊線型群と呼ばれるのであった) は正規部分群である．部分群であることの確認は第 4 回講義資料で既に行っているので，ここでは正規部分群であることをチェックしよう．命題 8.2 の (1) と (3) の同値性より，

$$\text{任意の } A \in GL_n(\mathbb{K}) \text{ と } X \in SL_n(\mathbb{K}) \text{ に対して，} AXA^{-1} \in SL_n(\mathbb{K})$$

となることを示せばよい．行列式が $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ に対して，

$$\det(AB) = \det(A)\det(B), \qquad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

という性質を満たしたことを思い出すと，

$$\begin{aligned} \det(AXA^{-1}) &= \det(A)\det(X)\det(A^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) \quad (X \in SL_n(\mathbb{K}) \text{ なので}) \\ &= \det(A) \cdot \frac{1}{\det(A)} = 1 \end{aligned}$$

となるので，確かに $AXA^{-1} \in SL_n(\mathbb{K})$ であることがわかった．

例 4. $\mathbb{K}$ を $\mathbb{Q},\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．2 次一般線型群

$$GL_2(\mathbb{K}) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbb{C}, ad-bc \neq 0 \right\}$$

を考える．このとき，

$$B \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| a,b,d \in \mathbb{C}, ad \neq 0 \right\}$$

は部分群であるが正規部分群<u>ではない</u>．これは以下のように確かめられる：

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in B$ より，B は空ではない．任意の $g,h \in B$ に対し，$g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$，$h = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}$ とすると，

$$gh = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab'+bd' \\ 0 & dd' \end{pmatrix}$$

であり，$(aa')(dd') = (ad)(a'd') \neq 0$ なので，$gh \in B$．さらに，$g^{-1} = \dfrac{1}{ad}\begin{pmatrix} d & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ より，$g^{-1} \in B$．以上より，B は $GL_2(\mathbb{K})$ の部分群である．

一方，例えば $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{K})$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in B$ に対し，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \notin B$$

となる．よって，B は命題 8.2 (3) の条件を満たさず，正規部分群とならない．

例 5. G を群としたとき，その中心 $Z(G) \coloneqq \{z \in G \mid zg = gz, \forall g \in G\}$ は G の正規部分群である (中心については第 6 回講義資料を参照のこと)．中心が部分群出あることは命題 5.11 で示してあるので，ここでは正規であることを確かめる．任意の $g \in G$ と $z \in Z(G)$ に対して，

$$gzg^{-1} = zgg^{-1} = ze = z \in Z(G)$$

である．よって，命題 8.2 (3) が満たされるので，$Z(G)$ は G の正規部分群である．

例 6 (交換子群 (やや発展なので難しいと思う方は定理 8.8 まで飛ばしても良い))**.**

定義 8.4

G を群とする．各 $g_1, g_2 \in G$ に対し，g_1 と g_2 の**交換子 (commutator of g_1 and g_2)**$[g_1, g_2]$ を，

$$[g_1, g_2] \coloneqq g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$$

と定義する．さらに，G の**交換子群 (commutator subgroup of G)**$\mathrm{D}(G)$ を、

$$\mathrm{D}(G) \coloneqq \langle \{[g_1, g_2] \mid g_1, g_2 \in G\} \rangle$$

と定義する．ここで、右辺は交換子全体 $\{[g_1, g_2] \mid g_1, g_2 \in G\}$ の<u>生成する</u>G の部分群である．

注意. (1) 各 $g_1, g_2 \in G$ に対し，$[g_1, g_2]^{-1} = (g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1})^{-1} = g_2 g_1 g_2^{-1} g_1^{-1} = [g_2, g_1]$ である．

(2) $\{[g_1, g_2] \mid g_1, g_2 \in G\}$ は (1) より逆元をとる操作では閉じているが，一般に二項演算では閉じておらず，これ自体は群にはならない．

命題 8.5

群 G に対し，$\mathrm{D}(G)$ は G の正規部分群である．

命題 8.5 の証明のために、以下の補題を用いる．

補題 8.6

群 G とその部分集合 S に対し、

$$\text{任意の } g \in G \text{ に対して，} gSg^{-1} \subset S$$

が成立するとき，S の生成する G の部分群 $\langle S \rangle$ は G の正規部分群である．

証明． 任意の $\langle S \rangle$ の元 s は

$$s = s_1^{m_1} s_2^{m_2} \cdots s_k^{m_k} \ (\text{ただし，} s_1, s_2, \ldots, s_n \in S\text{、} m_1, m_2, \ldots, m_k \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}) \tag{8.1}$$

と書けるのであった (第 6 回講義資料定義 5.5)．ここで，各 $g, h \in G$ に対し，

$$\alpha_g(h) \coloneqq ghg^{-1} \tag{8.2}$$

と定義すると，任意の $h_1, h_2 \in G$ に対して，

$$\begin{aligned}
\alpha_g(h_1 h_2) &= g h_1 h_2 g^{-1} = g h_1 g g^{-1} h_2 g^{-1} = \alpha_g(h_1)\alpha_g(h_2), \\
\alpha_g(h_1^{-1}) &= g h_1^{-1} g^{-1} = (g h_1 g^{-1})^{-1} = \alpha_g(h_1)^{-1}
\end{aligned}$$

が成立する[*1]．よって，これを繰り返し用いると，任意の $g \in G$ と上の (8.1) の形の元 s に対して，

$$gsg^{-1} = \alpha_g(s) = \alpha_g(s_1)^{m_1} \alpha_g(s_2)^{m_2} \cdots \alpha_g(s_k)^{m_k}$$

となるが，仮定より $\alpha_g(s_1), \alpha_g(s_2), \ldots, \alpha_g(s_k) \in S$ なので，上式の右辺は再び $\langle S \rangle$ の元であり，$gsg^{-1} \in \langle S \rangle$ である．よって，命題 8.2 (3) の条件が満たされるので，$\langle S \rangle$ は G の正規部分群である． □

命題 8.5 の証明． 補題 8.6 と交換子群の定義より，

$$\text{任意の } g, h_1, h_2 \in G \text{ に対し，} g[h_1, h_2]g^{-1} \in \{[g_1, g_2] \mid g_1, g_2 \in G\}$$

を示せばよいことがわかる (補題 8.6 における S が $\{[g_1, g_2] \mid g_1, g_2 \in G\}$ である)．補題 8.6 の証明中の (8.2) で定義した α_g という記号を用いると，補題 8.6 の証明中に示した α_g の性質より，任意の $g, h_1, h_2 \in G$ に対し，

$$g[h_1, h_2]g^{-1} = \alpha_g([h_1, h_2]) = \alpha_g(h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1}) = \alpha_g(h_1)\alpha_g(h_2)\alpha_g(h_1)^{-1}\alpha_g(h_2)^{-1} = [\alpha_g(h_1), \alpha_g(h_2)].$$

よって，$g[h_1, h_2]g^{-1} \in \{[g_1, g_2] \mid g_1, g_2 \in G\}$ であり，示すべきことは示された． □

G に対して交換子群 $\mathrm{D}(G)$ を取るという操作は繰り返し行うことができる．つまり，G に対して，

$$\mathrm{D}_0(G) \coloneqq G \qquad \mathrm{D}_1(G) \coloneqq \mathrm{D}(\mathrm{D}_0(G)) \qquad \mathrm{D}_2(G) \coloneqq \mathrm{D}(\mathrm{D}_1(G)) \qquad \mathrm{D}_3(G) \coloneqq \mathrm{D}(\mathrm{D}_2(G)) \quad \cdots$$

と $\mathrm{D}_k(G) \coloneqq \mathrm{D}(\mathrm{D}_{k-1}(G))$ $(k \in \mathbb{Z}_{>0})$ を満たすように順に定義していくことができる．このとき，命題 8.5 より，任意の $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，$\mathrm{D}_k(G)$ は $\mathrm{D}_{k-1}(G)$ の正規部分群となる．

定義 8.7

群 G がある正の整数 n において，$\mathrm{D}_n(G) = \{e\}$ を満たすとき，G を**可解群 (solvable group)** という．

(i) G を可換群とすると，任意の $g_1, g_2 \in G$ に対し，

$$[g_1, g_2] = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} = g_2 g_1 g_1^{-1} g_2^{-1} = g_2 g_2^{-1} = e$$

となるので，$\mathrm{D}_1(G) = \mathrm{D}(G) = \langle e \rangle = \{e\}$．よって，$G$ は可解群である．

[*1] この性質は $\alpha_g \colon G \to G, h \mapsto ghg^{-1}$ が**群準同型**であるということに対応する．群準同型は次回のテーマである．

(ii) $D_n = \{\sigma^k\tau^\ell \mid k = 0, \ldots, n-1, \ell = 0, 1\}$ を n 次二面体群とする ($\sigma^n = e, \tau^2 = e, \sigma^k\tau = \tau\sigma^{-k}$ ($k \in \mathbb{Z}$)). このとき，$\sigma^{k_1}\tau^{\ell_1}, \sigma^{k_2}\tau^{\ell_2} \in D_n$ に対し，

$$
\begin{aligned}
[\sigma^{k_1}\tau^{\ell_1}, \sigma^{k_2}\tau^{\ell_2}] &= \sigma^{k_1}\tau^{\ell_1}\sigma^{k_2}\tau^{\ell_2}(\sigma^{k_1}\tau^{\ell_1})^{-1}(\sigma^{k_2}\tau^{\ell_2})^{-1} \\
&= \sigma^{k_1}\tau^{\ell_1}\sigma^{k_2}\tau^{\ell_2}(\sigma^{k_2}\tau^{\ell_2}\sigma^{k_1}\tau^{\ell_1})^{-1} \\
&= \sigma^{k_1+(-1)^{\ell_1}k_2}\tau^{\ell_1+\ell_2}(\sigma^{k_2+(-1)^{\ell_2}k_1}\tau^{\ell_1+\ell_2})^{-1} \\
&= \sigma^{k_1+(-1)^{\ell_1}k_2}\tau^{\ell_1+\ell_2}\tau^{-\ell_1-\ell_2}\sigma^{-k_2-(-1)^{\ell_2}k_1} \\
&= \sigma^{k_1-(-1)^{\ell_2}k_1+(-1)^{\ell_1}k_2-k_2}
\end{aligned}
$$

となるので，特に $\{[g_1, g_2] \mid g_1, g_2 \in G\} \subset \{e, \sigma, \ldots, \sigma^{n-1}\}$．これより，$\mathrm{D}_1(D_n) = \mathrm{D}(D_n) \subset \langle\sigma\rangle = \{e, \sigma, \ldots, \sigma^{n-1}\}$[*2]．特に，$\mathrm{D}_1(D_n)$ は可換群 $\langle\sigma\rangle$ の部分群なので可換群である．よって，(i) より，$\mathrm{D}_2(D_n) = \mathrm{D}(\mathrm{D}_1(D_n)) = \{e\}$．よって，$D_n$ は可解群である．

(iii) n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ は $n = 1, 2, 3, 4$ のとき可解，$n \geq 5$ のとき非可解となる．この事実の証明はここでは行わないが (興味のある方は調べてみて欲しい)，実はこのことは “5 次以上の方程式には，その係数の四則演算と冪根で表される解の公式が存在しない” という有名な事実に直接対応している．興味のある方は『ガロア理論』というキーワードで調べて勉強してみて欲しい．「可解」という言葉もこの理論を由来とする言葉のようである．

さて，G の部分群 N が正規部分群だと何が良いのだろうか？実はこのとき，商集合 G/N に再び群構造が入るのである！定理の形で述べておこう．

定理 8.8

G を群，N を G の正規部分群とすると，二項演算

$$\cdot\colon G/N \times G/N \to G/N, (gN, hN) \mapsto gN \cdot hN \coloneqq ghN$$

が well-defined であり，これによって G/N が再び群となる．

定義 8.9

定理 8.8 の方法で作られる群 G/N を G の N による**剰余群**という．

定理 8.8 の証明． まず，二項演算の well-defined 性をチェックする．このためには，

$$gN = g'N, hN = h'N \text{ としたとき，} ghN = g'h'N$$

となることを示せばよい．$gN = g'N, hN = h'N$ のとき，$g \overset{N}{\sim}_L g', h \overset{N}{\sim}_L h'$ なので (この記号については第 7 回講義資料定義 6.4 を参照のこと)，ある $n_1, n_2 \in N$ が存在して，$g = g'n_1, h = h'n_2$ となる．このとき，

$$gh = g'n_1h'n_2 = g'h'(h')^{-1}n_1h'n_2$$

となるが，いま N は正規部分群なので，命題 8.2 (3) の同値条件から $(h')^{-1}n_1h' \in N$ であることがわかる．よって，$(h')^{-1}n_1h'n_2 \in N$ (N は二項演算で閉じている)．これより，上の等式は $gh \overset{N}{\sim}_L g'h'$ であることを示している．よって，$ghN = g'h'N$．

次に，この二項演算が群の二項演算の 3 性質を満たしていることを確かめる：

(I) (結合法則) 任意の $gN, hN, kN \in G/N$ に対し，

$$(gN \cdot hN) \cdot kN = ghN \cdot kN = (gh)kN = g(hk)N = gN \cdot hkN = gN \cdot (hN \cdot kN)$$

[*2] もう少し真面目に考えると，$\mathrm{D}_1(D_n) = \langle\sigma^2\rangle$ であることがわかる．考えてみよ．

[*2] この等式は $|G|, |H|, (G : H)$ の中に ∞ のものがあっても成立する．例えば，G を無限群とし，H をその有限部分群とすると，指数 $(G : H)$ は ∞ となる．

(群 G の二項演算が結合法則を満たしていることを用いた．)

(II) (単位元の存在) 単位元は $eN = N \in G/N$ である．実際，任意の $gN \in G/N$ に対し，

$$eN \cdot gN = egN = gN = geN = gN \cdot eN$$

が成立する．

(III) (逆元の存在) 各 $gN \in G/N$ に対し，$g^{-1}N$ を考えると，これは

$$gN \cdot g^{-1}N = gg^{-1}N = eN = g^{-1}gN = g^{-1}N \cdot gN$$

を満たしている．よって，$(gN)^{-1} = g^{-1}N$ である．

以上より，示すべきことは示された．$\square$

例 7. n を正の整数とする．加法群 $\mathbb{Z}$ と n の倍数全体からなる部分群 $\langle n\rangle = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}(=: n\mathbb{Z})$ を考える．$\mathbb{Z}$ は可換群なので，その部分群 $n\mathbb{Z}$ は正規部分群である．これにより，定理 8.8 から剰余群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が構成できる．これは集合としては，

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{a + n\mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}\} = \{0 + n\mathbb{Z}, 1 + n\mathbb{Z}, 2 + n\mathbb{Z}, \dots, (n-1) + n\mathbb{Z}\}$$

であったことを思い出そう (第 7 回講義資料例 7)．このとき，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の二項演算は定理 8.8 から，

$$(a + n\mathbb{Z}) + (b + n\mathbb{Z}) = a + b + n\mathbb{Z}$$

で定義される．剰余類 $a + n\mathbb{Z}$ を $[a]_n$ と書くと，これは今まで学んできた群 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ に他ならない．$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ という記号を使っていたのはこの考え方によるものだったのである．

なお，$n\mathbb{Z}$ は加法群 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ らの部分群でもあるので，剰余群 $(\mathbb{Q}/n\mathbb{Z}, +), (\mathbb{R}/n\mathbb{Z}, +), (\mathbb{C}/n\mathbb{Z}, +)$ も同様に定義することができる．

例 8. 例 2 の状況を考えよう．$D_3 = \{e, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau\}$ を 3 次二面体群とする ($\sigma^3 = e, \tau^2 = e, \sigma^k\tau = \tau\sigma^{-k}$ $(k \in \mathbb{Z})$)．このとき，$N := \langle\sigma\rangle = \{e, \sigma, \sigma^2\}$ は正規部分群であり，

$$D_3/N = \{gN \mid g \in G_3\} = \{N, \tau N\}$$

となるのであった．このとき，D_3/N の二項演算は定理 8.8 から，

$$N \cdot N = N, \qquad N \cdot \tau N = \tau N \qquad \tau N \cdot N = \tau N \qquad \tau N \cdot \tau N = \tau^2 N = N$$

となる．

例 9. n を正の整数とし，$\mathbb{K}$ を $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．一般線型群 $GL_n(\mathbb{K})$ を考える．このとき，$GL_n(\mathbb{K})$ の中心は

$$Z(GL_n(\mathbb{K})) = \{aI_n \mid a \in \mathbb{K}^\times\}$$ [*3]

となるのであった (第 6 回講義資料例 5．I_n は単位行列)．例 5 より，$Z(GL_n(\mathbb{K}))$ は $GL_n(\mathbb{K})$ の正規部分群である．$GL_n(\mathbb{K})$ の $Z(GL_n(\mathbb{K}))$ による剰余群

$$PGL_n(\mathbb{K}) := GL_n(\mathbb{K})/Z(GL_n(\mathbb{K}))$$

は**射影一般線型群 (projective general linear group)** と呼ばれる．

例 10. G を群とする．このとき，命題 8.5 より，$\mathrm{D}(G)$ は G の正規部分群となるのであった．このとき，剰余群 $G/\mathrm{D}(G)$ は可換群となる．なぜなら，各 $g\mathrm{D}(G), h\mathrm{D}(G) \in G/\mathrm{D}(G)$ に対し，$h^{-1}g^{-1}hg = [h^{-1}, g^{-1}] \in \mathrm{D}(G)$ となるので，

$$g\mathrm{D}(G) \cdot h\mathrm{D}(G) = gh\mathrm{D}(G) = gh(h^{-1}g^{-1}hg)\mathrm{D}(G) = hg\mathrm{D}(G) = h\mathrm{D}(G) \cdot g\mathrm{D}(G)$$

[*3] 第 6 回講義資料ではここの $\mathbb{K}^\times$ を $\mathbb{K}$ としてしまっていたので修正しておきました．

となるためである．実は $G/\mathrm{D}(G)$ は G を割って可換にするような “最小の割り方” であるということがわかる (証明は今後)．厳密に言うと，N を G の正規部分群とし，剰余群 G/N が可換群となるとき，$\mathrm{D}(G) \subset N$ となるのである．