代数学 I 第 10 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

9.1 群準同型

2 つの群 G_1, G_2 が与えられたとき，それらは一見見た目が違っても群としては “本質的に同じ” であるということがある．簡単な例として，加法群 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ と乗法群 $(\{1, -1\}, \times)$ を考えてみよう．これらは次のような演算規則を持つ：

$$[0]_2 + [0]_2 = [0]_2 \qquad [0]_2 + [1]_2 = [1]_2 \qquad [1]_2 + [0]_2 = [1]_2 \qquad [1]_2 + [1]_2 = [0]_2 \tag{9.1}$$

$$1 \times 1 = 1 \qquad 1 \times (-1) = -1 \qquad (-1) \times 1 = -1 \qquad (-1) \times (-1) = 1 \tag{9.2}$$

これを見ると，$[0]_2$ を 1 に (=単位元を単位元に)，$[1]_2$ を -1 に対応させ，$+$ を $\times$ で読み替えると，上の群の演算規則がしたの群の演算規則となることがわかる．このようなときに，$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ と $(\{1, -1\}, \times)$ は見かけは違うが，群としての構造は全く同じであると考える．

さらに，n 次二面体群 $D_n = \{\sigma^k \tau^\ell \mid k = 0, \ldots, n-1, \ell = 0, 1\}$ $(\sigma^n = e, \tau^2 = e, \sigma^k\tau = \tau\sigma^{-k}$ $(k \in \mathbb{Z}))$ において，

$$e \circ e = e \qquad e \circ \tau = \tau \qquad \tau \circ e = \tau \qquad \tau \circ \tau = e \tag{9.3}$$

が成り立っていた．これを見ると，$[0]_2$ を e に (=単位元を単位元に)，$[1]_2$ を τ に対応させ，$+$ を $\circ$ で読み替えると，やはり $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ での演算規則が，D_n の部分群 $\langle\tau\rangle = \{e, \tau\}$ の演算規則と対応することがわかる．これにより，先ほどの “群としての同一視” を考えると，D_n は群として $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を含んでいるということができる．

一般に，群は “対称性” の抽象化であったという気持ちを思い出すと，2 つの対称性 (=群) が与えられた時に，それらが本質的に同じものかどうか，あるいは一方が他方を含むようなものであるかどうかを知ることは重要なことと言えるだろう (対称性の比較)．今回はそういった “群の間の関係” ことを定式化する概念として，**準同型**と呼ばれるものを学ぶ．

定義 9.1

G, G' を群とする．写像 $\phi \colon G \to G'$ が

$$\text{任意の } g_1, g_2 \in G \text{ に対して}, \phi(g_1g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2)$$

を満たすとき，ϕ を**準同型 (homomorphism)** あるいは**群準同型 (group homomorphism)** という．さらに写像として ϕ が全射であるとき ϕ を**全射準同型**，単射であるとき**単射準同型**，全単射であるとき**全単射準同型**という，
準同型 $\phi \colon G \to G'$ に対し，

$$\mathrm{Ker}\,\phi := \{g \in G \mid \phi(g) = e'\} \text{ (ただし，} e' \text{は } G' \text{の単位元)}$$
$$\mathrm{Im}\,\phi := \{g' \in G' \mid \text{ある } g \in G \text{ が存在して}, \phi(g) = g'\}$$

とし，$\mathrm{Ker}\,\phi$ を ϕ の**核 (kernel)**，$\mathrm{Im}\,\phi$ を ϕ の**像 (image)** という．ここで $\mathrm{Ker}\,\phi$ は G の部分集合であり，$\mathrm{Im}\,\phi$ は G' の部分集合であることに注意すること．

例を見る前に定義からわかる準同型の基本的な命題を 3 つ述べよう．まず例を見たいという方はこれらを一旦

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

飛ばして例を見てもらっても良い (ただしこれらは全て基本的な命題なので，例を見た後はこちらに戻ってくること).

命題 9.2

$\phi\colon G \to G'$ を準同型とし，e を G の単位元，e' を G' の単位元とする．このとき，以下が成立する：

(1) $\phi(e) = e'$．(“単位元は必ず単位元に送られる”)
(2) 任意の $g \in G$ に対して，$\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$.

証明.
(1) 単位元と準同型の性質より，

$$\phi(e) = \phi(ee) = \phi(e)\phi(e)$$

が成立する．これより，$\phi(e)^{-1}$ を両辺に掛けると，$e' = \phi(e)$ がわかる． □
(2) $\phi(g^{-1})$ が $\phi(g)$ の逆元の定義の性質を満たしていることを確かめる．

$$\begin{aligned}\phi(g^{-1})\phi(g) &= \phi(g^{-1}g) \quad (\text{準同型の性質より}) \\ &= \phi(e) = e' \quad ((1)\ \text{より}) \\ \phi(g)\phi(g^{-1}) &= \phi(gg^{-1}) \quad (\text{準同型の性質より}) \\ &= \phi(e) = e' \quad ((1)\ \text{より})\end{aligned}$$

となるので，確かに $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$ である． □

命題 9.3

$\phi\colon G \to G'$ を準同型とする．このとき，以下が成立する：

(1) $\mathrm{Im}\,\phi$ は G' の部分群.
(2) $\mathrm{Ker}\,\phi$ は G の正規部分群.

証明.
(1) 定義より $\mathrm{Im}\,\phi$ の元は $\phi(g)$ $(g \in G)$ の形で書けるものであったので，$\mathrm{Im}\,\phi$ は明らかに空ではない．次に，任意の $\phi(g_1), \phi(g_2) \in \mathrm{Im}\,\phi$ に対し，準同型の性質から，

$$\phi(g_1)\phi(g_2) = \phi(g_1g_2) \in \mathrm{Im}\,\phi.$$

また，任意の $\phi(g) \in \mathrm{Im}\,\phi$ に対し，命題 9.2 (2) から，

$$\phi(g)^{-1} = \phi(g^{-1}) \in \mathrm{Im}\,\phi.$$

よって，$\mathrm{Im}\,\phi$ は二項演算と逆元を取る操作について閉じているので，$\mathrm{Im}\,\phi$ は G' の部分群である． □
(2) G の単位元を e，G' の単位元を e' とする．命題 9.2 (1) より，$\phi(e) = e'$ なので，$e \in \mathrm{Ker}\,\phi$ となり，特に $\mathrm{Ker}\,\phi$ は空ではない．次に，任意の $g_1, g_2 \in \mathrm{Ker}\,\phi$ に対し，準同型の性質から，

$$\phi(g_1g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2) = e'e' = e'$$

より，$g_1g_2 \in \mathrm{Ker}\,\phi$．また，任意の $g \in \mathrm{Ker}\,\phi$ に対し，命題 9.2 (2) から，

$$\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1} = (e')^{-1} = e'$$

より，$g^{-1} \in \mathrm{Ker}\,\phi$．よって，$\mathrm{Ker}\,\phi$ は二項演算と逆元を取る操作について閉じているので，$\mathrm{Ker}\,\phi$ は G の部分群である．

次に正規性を確かめる．任意の $g \in G, k \in \mathrm{Ker}\,\phi$ に対し，

$$\phi(gkg^{-1}) = \phi(g)\phi(k)\phi(g^{-1}) = \phi(g)e'\phi(g^{-1}) = \phi(g)\phi(g^{-1}) = \phi(gg^{-1}) = \phi(e) = e' \quad (\text{命題 } 9.2(1))$$

となるので，$gkg^{-1} \in \mathrm{Ker}\,\phi$．よって，第 9 回講義資料命題 8.2 より，$\mathrm{Ker}\,\phi$ は正規部分群． □

命題 9.4

$\phi\colon G \to G'$ を準同型とする．e を G の単位元とする．このとき，以下が成立する：

(1) $\mathrm{Im}\,\phi = G' \Leftrightarrow \phi$ は全射．
(2) $\mathrm{Ker}\,\phi = \{e\} \Leftrightarrow \phi$ は単射．
(3) ϕ が全単射のとき，逆写像 $\phi^{-1}\colon G' \to G$ も準同型．

証明.

(1) これは全射の定義そのものである． □

(2) の $\Rightarrow$ 方向 この証明中では G' の単位元を e' と書くことにする．$g_1, g_2 \in G$ で $g_1 \neq g_2$ のとき，$g_1 g_2^{-1} \neq e$ である．いま，$\mathrm{Ker}\,\phi = \{e\}$ なので，ϕ で e' に送られる元は e だけであることから，

$$e' \neq \phi(g_1 g_2^{-1}) = \phi(g_1)\phi(g_2)^{-1}$$

(最後の等式では命題 9.2 (2) も用いた)．これより，$\phi(g_1) \neq \phi(g_2)$ であることがわかる．

(2) の $\Leftarrow$ 方向 ϕ が単射であることより，任意の $e \neq g \in G$ に対して， $e' = \phi(e) \neq \phi(g)$(最初の等式では命題 9.2 (1) を用いた) となる．よって，$g \notin \mathrm{Ker}\,\phi$ であるから，結局 $\mathrm{Ker}\,\phi$ の元は e のみ，つまり $\mathrm{Ker}\,\phi = \{e\}$ であることがわかる． □

(3) 任意の $g_1', g_2' \in G'$ に対して，

$$\phi(\phi^{-1}(g_1' g_2')) = g_1' g_2' = \phi(\phi^{-1}(g_1'))\phi(\phi^{-1}(g_2')) = \phi(\phi^{-1}(g_1')\phi^{-1}(g_2')).$$

(最後の等式は ϕ の準同型としての性質を用いた．) ここで，ϕ は単射であることより，結局

$$\text{任意の } g_1', g_2' \in G' \text{に対して}, \phi^{-1}(g_1' g_2') = \phi^{-1}(g_1')\phi^{-1}(g_2')$$

が言える．これは ϕ^{-1} が準同型であるということに他ならない． □

定義 9.5

$\phi\colon G \to G'$ が全単射準同型であるとき，ϕ を**同型 (isomorphism)** あるいは**群同型 (group isomorphism)** という．命題 9.4 (3) より，準同型 $\phi\colon G \to G'$ が同型であるとは，ある準同型 $\phi'\colon G' \to G$ が存在して，$\phi' \circ \phi = \mathrm{id}_G, \phi \circ \phi' = \mathrm{id}_{G'}$ となることとも言える (id_X で X 上の恒等写像を表す．)
同型 $\phi\colon G \to G'$ が存在するとき，G と G' は**同型である (isomorphic)** であるといい，$G \simeq G'$ と書く．

例 1. ここまで準備した言葉で 9.1 章の冒頭の例を定式化してみよう．初めの例は，写像

$$\phi\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \{1, -1\}, [0]_2 \mapsto 1, [1]_2 \mapsto -1$$

が同型であるということをチェックしたことに他ならない．実際このように対応させると，これは全単射で，任意の $[a]_2, [b]_2 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に対して，

$$\phi([a]_2 + [b]_2) = \phi([a]_2) \times \phi([b]_2)$$

が成り立つことが (9.1)，(9.2) からわかる ($\phi([1]_2 + [0]_2) = \phi([1]_2) = -1 = (-1) \times 1 = \phi([1]_2) \times \phi([0]_2)$ 等)．このように，群 G と G' が同型であるというのは，群としては実質的に全く同じである (この例のように “見かけ” が違うだけ) ということを主張することに他ならない．

また，$n \geq 3$ に対して，

$$\phi'\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to D_n, [0]_2 \mapsto e, [1]_2 \mapsto \tau$$

とすると，これは準同型であることがわかる．実際，任意の $[a]_2, [b]_2 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に対して，

$$\phi'([a]_2 + [b]_2) = \phi'([a]_2) \circ \phi'([b]_2)$$

が成り立つことが (9.1)，(9.3) からわかる ($\phi'([1]_2 + [1]_2) = \phi'([0]_2) = e = \tau \circ \tau = \phi'([1]_2) \circ \phi'([1]_2)$ 等)．ϕ' は構成から明らかに単射準同型である．

例 2. 乗法群 $\mathbb{C}^\times$ から $\mathbb{R}^\times$ への絶対値を取る写像

$$|\cdot|\colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{R}^\times,\ z = x + iy \mapsto |z| \coloneqq \sqrt{x^2+y^2}\ (x, y \in \mathbb{R})$$

は準同型である．実際，絶対値の性質として，任意の $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^\times$ に対し，

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

が成り立つのであった．これは準同型の定義条件に他ならない．このとき

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}|\cdot| &\coloneqq \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1\} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}(=: \mathbb{T})\\ \operatorname{Im}|\cdot| &\coloneqq \{r \in \mathbb{R}^\times \mid \text{ある } z \in \mathbb{C}^\times \text{が存在して，} |z| = r\} = \mathbb{R}_{>0}\end{aligned}$$

であり，$|\cdot|$ は全射でも単射でもない．

例 3. 加法群 $\mathbb{C}$ から $\mathbb{R}$ への絶対値を取る写像

$$|\cdot|\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ z \mapsto |z|$$

は準同型<u>ではない</u>．実際，いま加法群を考えているので考える演算は和 $+$ であるが，

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$$

は一般には成立しない (例えば，$|1 + (-1)| = 0 \neq |1| + |-1|$)．

例 4. 指数・対数写像

$$\begin{aligned}\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0},\ x \mapsto e^x\\ \log\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \log(x)\end{aligned}$$

はどちらも準同型である．実際，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\exp(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = \exp(x)\exp(y) \quad (\text{指数法則})$$

が成り立ち，任意の $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し，

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$$

が成り立つことは良く知っていると思われるが，これらは準同型の定義条件に他ならない．また，このとき

$$\log \circ \exp = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \qquad \exp \circ \log = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{>0}}$$

が成立するので，定義 9.5 より，$\exp, \log$ はいずれも同型である (特に $\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}_{>0}$)．加法群 $\mathbb{R}$ と乗法群 $\mathbb{R}_{>0}$ は見かけは違うが，実は群としては同じものだったのである！[*1]

例 5. n を正の整数とし，$\mathbb{K}$ を $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．一般線型群

$$GL_n(\mathbb{K}) \coloneqq \{A \mid A \text{ は } \mathbb{K} \text{ の元を成分とする } n \times n \text{ 行列で，} \det A \neq 0\}$$

を考える．このとき，行列式を取る写像

$$\det\colon GL_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^\times,\ A \mapsto \det(A)$$

は準同型である．実際，任意の $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ に対して，

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

[*1] 舞台を有理数にうつすと，加法群 $\mathbb{Q}$ と乗法群 $\mathbb{Q}_{>0}$ は実は同型ではない！今回の本レポート課題にしたので，証明を考えてみよ．

という性質が成り立つのであったが，これは準同型の定義条件に他ならない．このとき

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}\det &\coloneqq \{A\in GL_n(\mathbb{K}) \mid \det(A)=1\} = SL_n(\mathbb{K})\\ \operatorname{Im}\det &\coloneqq \{r\in\mathbb{K}^\times \mid \text{ある } A\in GL_n(\mathbb{K}) \text{ が存在して，} \det(A)=r\} = \mathbb{K}^\times\end{aligned}$$

である．ここで，像 $\operatorname{Im}\det$ が $\mathbb{K}^\times$ であることは，任意の $a\in\mathbb{K}^\times$ に対し，

$$\det\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix} = a$$

であることからわかる．よって，これは全射準同型である．命題 9.3(2) から，$\operatorname{Ker}\det$ は $GL_n(\mathbb{K})$ の正規部分群だったので，特殊線型群 $SL_n(\mathbb{K})$ が一般線型群 $GL_n(\mathbb{K})$ の正規部分群であることはこの事実からもわかる[*2]．

例 6. n を 2 以上の整数とし，n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ を考える．$\mathfrak{S}_n$ の各元 σ に対し，その符号 $\operatorname{sgn}\sigma$ を

$$\operatorname{sgn}\sigma \coloneqq \det E_\sigma \quad \text{ただし，} E_\sigma \text{は} \begin{cases} (\sigma(i), i) \text{ 成分が } 1\\ \text{それ以外の成分が } 0\end{cases} \quad \text{として定義される } n\times n \text{ 行列}$$

と定義する[*3]．例えば，$n=3$ のとき，

$$E_{\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{smallmatrix}\right)} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad E_{\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{smallmatrix}\right)} = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad E_{\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{smallmatrix}\right)} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$E_{\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{smallmatrix}\right)} = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} \qquad E_{\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{smallmatrix}\right)} = \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} \qquad E_{\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{smallmatrix}\right)} = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

であり，

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=1 \qquad \operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=-1 \qquad \operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=-1$$

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=1 \qquad \operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=1 \qquad \operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=-1$$

である．符号は，$n\times n$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

の行列式 $\det(A)$ の一般形を表す際に，

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (\operatorname{sgn}\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} \tag{9.4}$$

として出てきていたものであったことを思い出そう．さらに，符号 sgn は以下の性質を満たすのであった．

(S1) $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^k$．ただし，$k$ は σ を隣接互換 $(i\ i+1)$ の何回かの合成で書いた際に現れる隣接互換の個数である (第 6 回講義資料定理 5.4 (2) 参照)．これは，対称群とあみだくじの関係を思い出すと σ に対応するあみだくじを書いたときの横棒の本数の数と言っても良い (σ に対応するあみだくじは無数にあるが，横棒の本数の偶奇は表し方にはよらない)[*4]．

[*2] 命題 9.3(2) における正規性の証明は $SL_n(\mathbb{K})$ の正規性の証明とほぼ同じなので「命題 9.3(2) を使うことが $SL_n(\mathbb{K})$ の正規性の別証明である」ということには少し抵抗がある．

[*3] [細かい注意．余り気にしなくても良い．] 行列式の定義として (9.4) を用いることもあり，その流儀の方にとっては符号 $\operatorname{sgn}\sigma$ を det で定義するということは「det の定義に sgn が必要で，sgn の定義に det が必要」というよう循環してしまうので良くない．私が 2019 年度の後期に担当した線形代数 II では第 1 行目に関する余因子展開で行列式の定義を行ったので，昨年私の講義を受けた方はこの点の問題は生じないことになっている．

[*4] 先学期の私が担当した線形代数 II を受けていた方にはこちらのあみだくじの方で説明した．

(S2) 任意の $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_n$ に対して，$\mathrm{sgn}(\sigma_1\sigma_2) = \mathrm{sgn}(\sigma_1)\,\mathrm{sgn}(\sigma_2)$.

(S1) は特に $\mathrm{sgn}\,\sigma$ の値は 1 か -1 であるということを主張しており，(S2) と合わせると，これは

$$\mathrm{sgn}\colon \mathfrak{S}_n \to \{1, -1\}, \sigma \mapsto \mathrm{sgn}\,\sigma$$

が全射準同型であるということに他ならない．さらにこのとき，

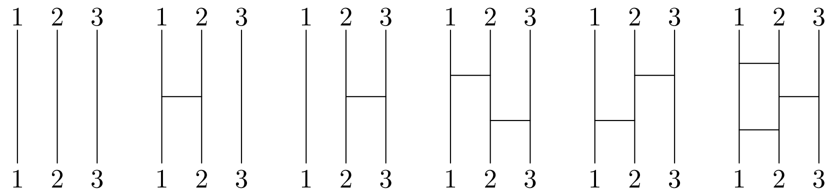
$$\mathrm{Ker}\,\mathrm{sgn} \coloneqq \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \mathrm{sgn}\,\sigma = 1\}$$

であるが，この群は n **次交代群 (alternating group)** と呼ばれ，$\mathfrak{A}_n$[*5]と書かれる．$\mathfrak{A}_n$ の元，すなわち $\mathrm{sgn}\,\sigma = 1$ となる $\mathfrak{S}_n$ の元を**偶置換**とよび，$\mathrm{sgn}\,\sigma = -1$ となる $\mathfrak{S}_n$ の元を**奇置換**と呼んだこともついでに思い出しておこう．

なお，性質 (S1) は実際の符号の計算において便利である．例えば $n = 3$ のとき，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

に対応するあみだくじはこの順に以下のようにとれる：



横棒の本数は順に 0 本，1 本，1 本，2 本，2 本，3 本なので，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (-1)^0 = 1 \qquad \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (-1)^1 = -1 \qquad \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (-1)^1 = -1 \\
&\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (-1)^2 = 1 \qquad \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^2 = 1 \qquad \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^3 = -1
\end{aligned}$$

となっている．

例 7. $\mathbb{K}$ を $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間は加法 $+$ に関して群をなすのであった (第 4 回講義資料例 3 参照)．V, W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間としたとき，線形写像 $f\colon V \to W$ は準同型でもある．実際，線形写像の性質

$$f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = f(\boldsymbol{v}_1) + f(\boldsymbol{v}_2),\ \forall \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$$

は準同型の定義条件に他ならない．このとき，準同型としての核 $\mathrm{Ker}\,f$ や像 $\mathrm{Im}\,f$ は線形写像としての核や像と一致していることが定義からすぐにわかる．

例 8. 任意の巡回群 $G = \langle g \rangle = \{g^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ に対し，

$$p\colon \mathbb{Z} \to G,\ m \mapsto g^m$$

は全射準同型である．実際，任意の $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$p(m_1 + m_2) = g^{m_1+m_2} = g^{m_1}g^{m_2} = p(m_1)p(m_2)$$

という性質が成り立つ．このとき，

$$\mathrm{Ker}\,p \coloneqq \{m \in \mathbb{Z} \mid g^m = e\}$$

である．ここで，第 6 回講義資料命題 5.9 より，$g^m = e$ を満たす最小の正の整数が $\mathrm{ord}\,g$ であった．これより，

$$\begin{cases} \mathrm{ord}\,g = \infty \text{ のとき},\ \mathrm{Ker}\,p = \{0\}. \\ \mathrm{ord}\,g < \infty \text{ のとき},\ \mathrm{Ker}\,p = \langle \mathrm{ord}\,g \rangle = \{k\,\mathrm{ord}\,g \mid k \in \mathbb{Z}\} = (\mathrm{ord}\,g)\mathbb{Z}. \end{cases}$$

[*5] $\mathfrak{A}$ はドイツ文字の A である．

となる．実際には $\mathrm{ord}\, g < \infty$ のときの等号についてはもう少しきちんと示す必要があるが，$\mathrm{ord}\, g$ の最小性を用いれば難しくないのでこれは練習問題としよう．この結果より，$\mathrm{ord}\, g = \infty$ の場合には，p は単射であることもわかり (命題 9.4 (2))，p は同型であることがわかる．$\mathrm{ord}\, g = \infty$ である巡回群 $\langle g \rangle$ は全て加法群 $\mathbb{Z}$ と同型となるのである．

例 9. G を群，N をその正規部分群とする．このとき，剰余群 G/N を考えることができた (第 9 回講義資料定理 8.8，定義 8.9)．商写像

$$p\colon G \to G/N,\ g \mapsto gN$$

は全射準同型である．実際，任意の $g_1, g_2 \in G$ に対して，剰余群の二項演算の定義から，

$$p(g_1 g_2) = g_1 g_2 N = g_1 N \cdot g_2 N = p(g_1) \cdot p(g_2)$$

という性質が成り立つ．このとき，

$$\mathrm{Ker}\, p \coloneqq \{g \in G \mid gN = eN\} = \{g \in G \mid g \in eN\} = N$$

である．例えば，$G = \mathbb{Z}, N = n\mathbb{Z}$ $(n \in \mathbb{Z}_{>0})$ のとき，

$$p\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ a \mapsto [a]_n$$

は全射準同型であり，$\mathrm{Ker}\, p = n\mathbb{Z}$ である．

例 10. G を群とし，$a \in G$ とする．このとき，写像 $\alpha_a\colon G \to G$ を

$$\alpha_a\colon G \to G,\ g \mapsto aga^{-1}$$

と定めると，これは準同型である．実際，任意の $g_1, g_2 \in G$ に対して，

$$\alpha_a(g_1 g_2) = a g_1 g_2 a^{-1} = a g_1 a a^{-1} g_2 a^{-1} = \alpha_a(g_1)\alpha_a(g_2)$$

が成立する．さらに，上の a を a^{-1} として，$\alpha_{a^{-1}}\colon G \to G,\ g \mapsto a^{-1}ga$ を考えると，任意の $g \in G$ に対し，

$$(\alpha_{a^{-1}} \circ \alpha_a)(g) = a^{-1}(aga^{-1})a = g \qquad (\alpha_a \circ \alpha_{a^{-1}})(g) = a(a^{-1}ga)a^{-1} = g$$

となるので，$\alpha_{a^{-1}} \circ \alpha_a = \alpha_a \circ \alpha_{a^{-1}} = \mathrm{id}_G$ である．よって定義 9.5 より，α_a は同型である．このような α_a $(a \in G)$ を G の**内部自己同型 (inner automorphism)** という．

例 11 (やや発展．)**.** G を群とする．このとき，G から G への同型を全て集めてきてできる集合

$$\mathrm{Aut}(G) \coloneqq \{\phi\colon G \to G \mid \phi \text{は同型}\}$$

を考える．同型は全単射写像なので，これは第 5 回講義資料の例 1 で考えた G 上の全単射写像 (準同型とは限らない) のなす群 $B(G)$(二項演算は写像の合成) の部分集合となるが，実は $\mathrm{Aut}(G)$ は $B(G)$ の部分群となる．この群 $\mathrm{Aut}(G)$ を G の**自己同型群 (automorphism group)** という．このことは以下のように確かめられる：

任意の $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{Aut}(G)$ と $g_1, g_2 \in G$ に対し，

$$(\phi_1 \circ \phi_2)(g_1 g_2) = \phi_1(\phi_2(g_1 g_2)) = \phi_1(\phi_2(g_1)\phi_2(g_2)) = \phi_1(\phi_2(g_1)) \cdot \phi_1(\phi_2(g_2)) = (\phi_1 \circ \phi_2)(g_1) \cdot (\phi_1 \circ \phi_2)(g_2)$$

となるので，$\phi_1 \circ \phi_2$ も準同型である[*6]．さらに全単射性は合成で保たれるので，結局 $\phi_1 \circ \phi_2$ も G から G への同型となり，$\phi_1 \circ \phi_2 \in \mathrm{Aut}(X)$ である．また，任意の $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$ に対し，命題 9.4 (3) より ϕ^{-1} も G から G への同型となるので，$\phi^{-1} \in \mathrm{Aut}(G)$．以上より，$\mathrm{Aut}(G)$ は二項演算 (=写像の合成) と逆元を取る操作で閉じているので，$B(G)$ の部分群となる．

[*6] 全く同じ証明で任意の 2 つの準同型 $\psi\colon G \to G', \psi'\colon G' \to G''$ に対し，$\psi' \circ \psi$ が再び準同型となることがわかる．

さらに，例 10 で考えた内部自己同型全体のなす集合

$$\mathrm{Inn}(G) \coloneqq \{\alpha_a \colon G \to G \mid a \in G\}$$

を考えると，α_a は同型だったので，これは $\mathrm{Aut}(G)$ の部分集合である．このとき，実は $\mathrm{Inn}(G)$ は $\mathrm{Aut}(G)$ の正規部分群となる．この群 $\mathrm{Inn}(G)$ を**内部自己同型群 (inner automorphism group)** という．このことは，次のように確かめられる：

任意の $\alpha_{a_1}, \alpha_{a_2} \in \mathrm{Inn}(G)$ と $g \in G$ に対し，

$$(\alpha_{a_1} \circ \alpha_{a_2})(g) = \alpha_{a_1}(\alpha_{a_2}(g)) = a_1(a_2 g a_2^{-1})a_1^{-1} = (a_1a_2)g(a_1a_2)^{-1} = \alpha_{a_1a_2}(g)$$

となるので，

$$\alpha_{a_1} \circ \alpha_{a_2} = \alpha_{a_1a_2} \in \mathrm{Inn}(G) \tag{9.5}$$

である．また，例 10 で見たように，任意の $\alpha_a \in \mathrm{Inn}(G)$ に対して，$\alpha_a^{-1} = \alpha_{a^{-1}} \in \mathrm{Inn}(G)$ であった．以上より，$\mathrm{Inn}(G)$ は二項演算と逆元を取る操作で閉じているので，$\mathrm{Aut}(G)$ の部分群となる．次に正規性を確かめる．任意の $\phi \in \mathrm{Aut}(G), \alpha_a \in \mathrm{Inn}(G)$ と $g \in G$ に対し，

$$(\phi \circ \alpha_a \circ \phi^{-1})(g) = \phi(a\phi^{-1}(g)a^{-1}) = \phi(a)\phi(\phi^{-1}(g))\phi(a^{-1}) = \phi(a)g\phi(a)^{-1} = \alpha_{\phi(a)}(g)$$

となるので，$\phi \circ \alpha_a \circ \phi^{-1} = \alpha_{\phi(a)} \in \mathrm{Inn}(G)$．よって，$\mathrm{Inn}(G)$ は $\mathrm{Aut}(G)$ の正規部分群である．

ここで，(9.5) より少し面白いことがわかる．(9.5) は写像

$$\alpha \colon G \to \mathrm{Inn}(G),\ g \mapsto \alpha_g$$

が全射群準同型であるという式に他ならない．ではこの核を考えてみると，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}\,\alpha &\coloneqq \{z \in G \mid \alpha_z = \mathrm{id}_G\} \\
&= \{z \in G \mid zgz^{-1} = g, \forall g \in G\} \\
&= \{z \in G \mid zg = gz, \forall g \in G\} = Z(G)
\end{aligned}$$

となる．自己同型群への写像を考えると核が中心となるような準同型が得られるのである．特に，$Z(G) = \{e\}$ のとき ($G = \mathfrak{S}_n, n \geq 3$ など．第 6 回講義資料例 5 参照)，α は同型となり，$G \simeq \mathrm{Inn}(G)$ となる．