代数学 I 第 12 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

11.1　群の作用

群とは "対称性" の抽象化であるということを第 1, 2 回講義資料内で述べた．今回は "ある集合 X が群 G の対称性を持っている" という状況を数学的に定式化する．これが群 G の集合 X への**作用**である．

定義 11.1

群 G と<u>集合</u>X に対し，X **上の** G **の作用 (action of** G **on** X**)**[*1]とは，写像

$$\psi\colon G\times X\to X,\ (g,x)\mapsto \psi(g,x)$$

であって，次の 2 条件を満たすもののことを言う．

(1) 任意の $x\in X$ に対し，$\psi(e,x)=x$．ただし，e は G の単位元．

(2) 任意の $g,h\in G, x\in X$ に対し，$\psi(gh,x)=\psi(g,\psi(h,x))$．この条件は以下の図式で表される．

$$\begin{tikzcd}
 & & (g,h,x) \arrow[ddll, mapsto, bend right] \arrow[ddrr, mapsto, bend left] \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & & \\
 & & G\times G\times X \arrow[dl, "\text{(二項演算)}\times\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times\psi"] & & \\
(gh,x) \arrow[ddrr, mapsto, bend right] & \in\ G\times X \arrow[dr, "\psi"'] & & G\times X\ \ni \arrow[dl, "\psi"] & (g,\psi(h,x)) \arrow[ddll, mapsto, bend left] \\
 & & X \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\ni$}"] & & \\
 & & \psi(gh,x)=\psi(g,\psi(h,x)) & &
\end{tikzcd}$$

作用の定義条件は $\psi(g,x)$ を単に $g\cdot x$ と書くことにすると以下のように見やすくなる．以下ではこの記号をしばしば用いる．(群の二項演算と混乱しないように．)

$(1)'$ 任意の $x\in X$ に対し，$e\cdot x=x$.

$(2)'$ 任意の $g,h\in G, x\in X$ に対し，$gh\cdot x=g\cdot(h\cdot x)$.

---

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

*1 ここで定義した作用は**左作用**と呼ばれるものである．講義内では左作用のみを扱うのでこれを単に作用と呼ぶことにする．**集合** X **上の群** G **の右作用 (right action of** G **on** X**)** とは，写像

$$\psi\colon G\times X\to X,\ (g,x)\mapsto \psi(g,x)$$

であって，次の 2 条件を満たすもののことを言う．

(i) 任意の $x\in X$ に対し，$\psi(e,x)=x$．ただし，e は G の単位元．(左作用の定義条件の (1) と同じ)

(ii) 任意の $g,h\in G, x\in X$ に対し，$\psi(gh,x)=\psi(h,\psi(g,x))$.

右作用の定義条件は $\psi(g,x)$ を単に $x\cdot g$ と書くことにすると以下のように見やすくなる．

$(\mathrm{i})'$ 任意の $x\in X$ に対し，$x\cdot e=x$.

$(\mathrm{ii})'$ 任意の $g,h\in G, x\in X$ に対し，$x\cdot gh=(x\cdot g)\cdot h$.

例 1. n を正の整数とし，$X \coloneqq \{1, 2, \ldots, n\}$ としたとき，写像

$$\psi \colon \mathfrak{S}_n \times X \to X,\ (\sigma, i) \mapsto \sigma \cdot i \coloneqq \sigma(i)$$

は X 上の $\mathfrak{S}_n$ の作用を定める．例えば，$n = 5$ の場合，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot 1 = 3, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot 2 = 1, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot 5 = 5$$

などとなる．これが作用であることは次のように確かめられる．

(1) 任意の $i \in X$ に対し，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \cdot i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} (i) = i$.
(2) 任意の $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_n, i \in X$ に対し，$(\sigma_1 \circ \sigma_2) \cdot i = (\sigma_1 \circ \sigma_2)(i) = \sigma_1(\sigma_2(i)) = \sigma_1 \cdot (\sigma_2 \cdot i)$.

例 2. 例 1 は次のように一般化できる．X を任意の空でない集合とする．第 5 回講義資料例 1 で考えた，X から X への全単射写像全体のなす群

$$B(X) \coloneqq \{ f \colon X \to X \mid f \text{ は全単射} \}$$

を考える．ここで，二項演算は写像の合成 $\circ$，単位元は X 上の恒等写像 id_X であった．さらに，n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の定義は X を $\{1, 2, \ldots, n\}$ としたときの $B(X) = B(\{1, 2, \ldots, n\})$ であったということを思い出しておこう (第 5 回講義資料例 2)*2．このため，上の $B(X)$ という群は対称群の一般化と思うことができる．

さて，写像 ψ を

$$\psi \colon B(X) \times X \to X,\ (f, x) \mapsto f \cdot x \coloneqq f(x)$$

とすると，これは X 上の $B(X)$ の作用を定める．これは例 1 の一般化であり，作用であることのチェックは例 1 と全く同様である．

例 3. 写像

$$\psi \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ (a, n) \mapsto n - a$$

は集合 $\mathbb{Z}$ 上の加法群 $\mathbb{Z}$ の作用を定める ($\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ の左側の $\mathbb{Z}$ が加法群と思う方)．これが作用であることは次のように確かめられる．

(1) 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し，$\psi(0, n) = n - 0 = n$.
(2) 任意の $a_1, a_2, n \in \mathbb{Z}$ に対し，$\psi(a_1 + a_2, n) = n - (a_1 + a_2) = (n - a_2) - a_1 = \psi(a_1, \psi(a_2, n))$.

ちなみに引き算 $-$ は結合法則を満たさないため，集合 $\mathbb{Z}$ は $-$ を二項演算として群にはならなかったことを合わせて思い出そう (第 4 回講義資料例 1)．引き算は加法群 $\mathbb{Z}$ の作用なのである．

写像

$$\psi' \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ (a, n) \mapsto a^2 + n$$

は集合 $\mathbb{Z}$ 上の加法群 $\mathbb{Z}$ の作用ではない．なぜなら，このとき

$$\psi'(a_1 + a_2, n) = (a_1 + a_2)^2 + n \neq a_1^2 + a_2^2 + n = \psi'(a_1, \psi'(a_2, n)) \ (a_1 a_2 \neq 0 \text{ のとき})$$

となり，作用の定義条件の (2) が満たされないためである (なお，定義条件 (1) は満たされる)．

写像

$$\psi'' \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ (a, n) \mapsto 0 \qquad (\text{全てを } 0 \text{ に送る})$$

は集合 $\mathbb{Z}$ 上の加法群 $\mathbb{Z}$ の作用ではない．なぜなら，このとき

$$\psi''(0, n) = 0 \neq n \ (n \neq 0 \text{ のとき})$$

となり，作用の定義条件の (1) が満たされないためである (なお，定義条件 (2) は満たされる)．

*2 対称群の定義は計算にある程度慣れてくると忘れがちである．ここでもう一度復習しておこう．

例 4. n を正の整数とし，$\mathbb{K}$ を $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．このとき，写像

$$\psi\colon GL_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ (A, \boldsymbol{v}) \mapsto A\boldsymbol{v}\ (\text{行列の積})$$

は $\mathbb{K}^n$ 上の一般線型群 $GL_n(\mathbb{K})$ の作用を定める ($\mathbb{K}^n$ の元は n 次列ベクトルと考える)．例えば，$n = 2$ のときこの写像は具体的には以下である：

$$\psi\colon GL_2(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2, \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

これが作用であることは次のように確かめられる．

(1) 任意の $\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$ に対し，$\psi(I_n, \boldsymbol{v}) = I_n\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$．ただし，$I_n$ は n 次単位行列 ($GL_n(\mathbb{K})$ の単位元)．

(2) 任意の $A_1, A_2 \in GL_n(\mathbb{K}), \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$ に対し，$\psi(A_1A_2, \boldsymbol{v}) = (A_1A_2)\boldsymbol{v} = A_1(A_2\boldsymbol{v}) = \psi(A_1, \psi(A_2, \boldsymbol{v}))$ (行列の積の結合法則)．

また，

$$\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) \coloneqq \{A \mid A\ \text{は}\ \mathbb{K}\ \text{の元を成分とする}\ n \times n\ \text{行列}\ \}$$

とすると，写像

$$\psi'\colon GL_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}),\ (P, A) \mapsto PAP^{-1}$$

は $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ 上の $GL_n(\mathbb{K})$ の作用を定める． これが作用であることは次のように確かめられる．

(1) 任意の $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ に対し，$\psi'(I_n, A) = I_nAI_n^{-1} = A$．

(2) 任意の $P_1, P_2 \in GL_n(\mathbb{K}), A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ に対し，

$$\psi'(P_1P_2, A) = P_1P_2A(P_1P_2)^{-1} = P_1(P_2AP_2^{-1})P_1^{-1} = \psi'(P_1, \psi'(P_2, A)).$$

例 5. $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数全体のなす集合を $C^0(\mathbb{R})$ と書く．このとき，

$$\psi\colon \mathbb{R} \times C^0(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}),\ (r, f(x)) \mapsto f(x + r)\ (\text{関数の平行移動})$$

は $C^0(\mathbb{R})$ 上の加法群 $\mathbb{R}$ の作用を定める．これが作用であることは次のように確かめられる．

(1) 任意の $f(x) \in C^0(\mathbb{R})$ に対し，$\psi(0, f(x)) = f(x + 0) = f(x)$．

(2) 任意の $r_1, r_2 \in \mathbb{R}, f(x) \in C^0(\mathbb{R})$ に対し，

$$\psi(r_1 + r_2, f(x)) = f(x + (r_1 + r_2)) = f((x + r_1) + r_2) = \psi(r_1, f(x + r_2)) = \psi(r_1, \psi(r_2, f(x))).$$

例 6. G を群とし，e をその単位元とする．このとき，二項演算の写像

$$\psi_\ell\colon G \times G \to G,\ (g, h) \mapsto gh$$

は集合 G 上の群 G の作用を定めているとも考えられる ($G \times G$ の左側の G が群と思う方)．実際，以下のように作用であることが確かめられる．

(1) 任意の $g \in G$ に対し，$\psi_\ell(e, g) = eg = g$．

(2) 任意の $g_1, g_2, h \in G$ に対し，$\psi_\ell(g_1g_2, h) = (g_1g_2)h = g_1(g_2h) = \psi_\ell(g_1, \psi_\ell(g_2, h))$ (群の二項演算の結合法則)．

また，H を G の部分群とし，写像

$$\psi_{\ell,H}\colon G \times (G/H) \to G/H,\ (g, g'H) \mapsto gg'H$$

を考えると，これは商集合 G/H 上の群 G の作用を定める．作用であることのチェックは上の ψ_ℓ の場合と全く同様である．

写像

$$\psi_{\mathrm{ad}}\colon G \times G \to G,\ (g, h) \mapsto ghg^{-1}$$

は集合 G 上の群 G の作用を定める ($G \times G$ の左側の G が群と思う方)．これが作用であることは次のように確かめられる．

(1) 任意の $g \in G$ に対し，$\psi_{\mathrm{ad}}(e, g) = ege^{-1} = g$.
(2) 任意の $g_1, g_2, h \in G$ に対し，

$$\psi_{\mathrm{ad}}(g_1g_2, h) = (g_1g_2)h(g_1g_2)^{-1} = g_1(g_2hg_2^{-1})g_1^{-1} = \psi_{\mathrm{ad}}(g_1, \psi_{\mathrm{ad}}(g_2, h)).$$

作用 ψ_{ad} は**随伴作用 (adjoint action)** と呼ばれる．

命題 11.2

G を群，X を集合とする．

(1) $G \times X \to X,\ (g, x) \mapsto g \cdot x$ を集合 X 上の群 G の作用とすると，各 $g \in G$ に対し，写像

$$\phi_g \colon X \to X,\ x \mapsto g \cdot x$$

は全単射である．つまり，$\phi_g \in B(X)$ である (例 2 の記号を思い出すこと)．さらに，写像

$$\phi \colon G \to B(X),\ g \mapsto \phi_g$$

は準同型である．

(2) 逆に，準同型 $\phi \colon G \to B(X)$ が存在するとき，写像

$$G \times X \to X,\ (g, x) \mapsto g \cdot x := \phi(g)(x)\ (\phi(g) \text{ が全単射写像 } X \to X \text{ であることに注意})$$

は X 上の G の作用を定める．

Point

G を群，X を集合としたとき，命題 11.2 は，

- X 上の G の作用 $G \times X \to X$
- 準同型 $G \to B(X)$

の間に一対一の対応が作れるということを述べている．X 上の G の作用を定めるということは，準同型 $G \to B(X)$ を与えることと等価なのである．

命題 11.2 の証明.

(1) ϕ_g の全単射性：各 $g \in G$ に対し，ϕ_g の逆写像が構成できることを示せばよい．各 $x \in X$ に対し，

$$\begin{aligned}(\phi_{g^{-1}} \circ \phi_g)(x) &= \phi_{g^{-1}}(\phi_g(x)) \\ &= g^{-1} \cdot (g \cdot x) \\ &= (g^{-1} \cdot g) \cdot x \ (\text{作用の定義 (2) より}) \\ &= e \cdot x = x \ (\text{作用の定義 (2) より})\end{aligned}$$

となる．全く同様に $(\phi_g \circ \phi_{g^{-1}})(x) = x$．よって，$\phi_{g^{-1}} \circ \phi_g = \phi_g \circ \phi_{g^{-1}} = \mathrm{id}_X$ となる．よって，$\phi_{g^{-1}}$ が ϕ_g の逆写像であり，特に ϕ_g は全単射である．

ϕ が準同型であること：任意の $g_1, g_2 \in G, x \in X$ に対し，

$$\phi(g_1g_2)(x) = \phi_{g_1g_2}(x) = (g_1g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = \phi_{g_1}(\phi_{g_2}(x)) = (\phi(g_1) \circ \phi(g_2))(x)$$

となるので，$\phi(g_1g_2) = \phi(g_1) \circ \phi(g_2)$. □

(2) 作用の定義条件 (1) を満たすこと：e を G の単位元とすると，任意の $x \in X$ に対し，

$$e \cdot x = \phi(e)(x) = \mathrm{id}_X(x) = x.$$

ここで，$\phi(e) = \mathrm{id}_X$ は第 10 回講義資料命題 9.2 と群 $B(X)$ の単位元が id_X であることからわかる．
作用の定義条件 (2) を満たすこと：任意の $g, h \in G, x \in X$ に対し，

$$\begin{aligned} gh \cdot x &= \phi(gh)(x) = (\phi(g) \circ \phi(h))(x) \ (\phi\text{が準同型であることより}) \\ &= \phi(g)(\phi(h)(x)) = g \cdot (h \cdot x). \end{aligned}$$

□

定理 11.3

G が位数 n の有限群であるとき，単射準同型 $\phi\colon G \to \mathfrak{S}_n$ が存在する．つまり，任意の位数 n の有限群は n 次対称群のある部分群と同型になる．

証明． 例 6 で考えた G 上の G の作用 $\psi_\ell\colon G{\times}G \to G,\ (g,h) \mapsto gh$ を考える．ここで, G の元に適当に 1 から順に番号をつけ, 集合として G と $\{1, 2, \ldots, n\}$ を同一視すると, この作用は $\psi_\ell\colon G{\times}\{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ と見ることができる．命題 11.2 (1) より，これに対して準同型

$$\phi\colon G \to B(\{1, 2, \ldots, n\}) = \mathfrak{S}_n$$

が構成できる．これが, 単射であることを示せばよい．$g \in \operatorname{Ker}\phi$ とする．このとき, $\phi(g) = \mathrm{id}_{\{1,2,\ldots,n\}} = \mathrm{id}_G$ だが (G と $\{1, 2, \ldots, n\}$ を同一視していたことを忘れないように)，命題 11.2 (1) における ϕ の構成から，これは任意の $h \in G$ に対し，$h = \phi(g)(h) = \psi_\ell(g, h) = gh$ となることを主張している．ここで，$h = e$ ととると (e は G の単位元)，$e = ge = g$ となるので，結局 $g = e$ である．よって，$\operatorname{Ker}\phi = \{e\}$ となり，ϕ は単射である． □

注意 (興味のある方向け)．$\mathbb{K}$ を $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，

$$GL(V) \coloneqq \{f\colon V \to V \mid f \text{ は全単射}\underline{\text{線形}}\text{写像}\}$$

とする (V 上の**一般線型群**と呼ばれる)．このとき，$GL(V)$ は $B(V)$ の部分群である (チェックせよ)．また，V が n 次元ベクトル空間のとき，V の基底を 1 つ固定すると，$GL(V)$ は $GL_n(\mathbb{K})$ と同一視できるのであった (線形代数 II の内容．線形写像とその表現行列を同一視する)．

このとき，群 G に対し，準同型

$$\rho\colon G \to GL(V)$$

を群 G の V における**線形表現 (linear representation)** という．これは命題 11.2 の後の Point の見方で言うと，G の V 上の "線形な" 作用 $G \times V \to V$ を考えているとも言える．群 G を 1 つ与えたときに，『どのような線形表現が存在するか・どうすれば線形表現を構成できるか』ということを調べる数学の分野を (群の) **表現論 (representation theory)** という．表現論は様々な数学的手法 (代数・幾何・解析全て！) を用いて研究されており，数学の枠を超えて物理・化学への応用も持つ非常に大きな分野である．興味を持った方は是非進んで勉強してもらいたい[*3]．

1 つ例を挙げておこう．$D_n = \{\sigma^k \tau^\ell \mid k = 0, \ldots, n-1, \ell = 0, 1\}$ ($\sigma^n = e, \tau^2 = e, \sigma^k \tau = \tau \sigma^{-k}$ $(k \in \mathbb{Z})$) を n 次二面体群とする．このとき，準同型

$$\rho\colon D_n \to GL_2(\mathbb{R})$$

であって，

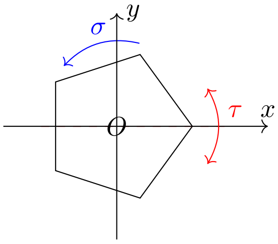
$$\rho(\sigma) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix} \qquad \rho(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

[*3] 私 (大矢) は代数的な方向から表現論の研究を行っている．もしもこの分野に興味を持った方は，3 年生の研究室配属時に私の研究室を候補に入れていただけると良いだろう．

を満たすものが存在する．これが定める $\mathbb{R}^2$ 上の D_n の作用は

$$D_n \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \left(\sigma^k\tau^\ell, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \mapsto \rho(\sigma^k\tau^\ell)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる．このとき，σ は $\mathbb{R}^2$ の原点を中心とする $2\pi/n$ 回転に対応し，τ は x 軸に関する線対称変換に対応する．n 次二面体群が正 n 角形の対称性であったことを思い出すと，これは自然な作用である．



定義 11.4

$G \times X \to X,\ (g, x) \mapsto g \cdot x$ を集合 X 上の群 G の作用とする．G の作用による $x \in X$ の **G-軌道 (G-orbit)** を

$$G \cdot x \coloneqq \{g \cdot x \mid g \in G\} (\subset X)$$

と定める．また，$x \in X$ における G の**固定部分群 (stabilizer)** を

$$G_x \coloneqq \{g \in G \mid g \cdot x = x\} (\subset G)$$

と定める．記号は似ているが $G \cdot x$ は X の部分集合であり，G_x は G の部分集合であることを注意しておく．

例を見る前に，軌道と固定部分群に関する以下の基本命題を述べよう．先に例を見たい方は例 7 に先に飛んでもらっても良い．

命題 11.5

$G \times X \to X,\ (g, x) \mapsto g \cdot x$ を集合 X 上の群 G の作用とする．このとき，以下が成立する．

(1) 集合 X において，

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \text{ある } g \in G \text{ が存在して，} x = g \cdot y$$

とすると，$\sim$ は X 上の同値関係を定める．このとき，$x \in X$ の G-軌道 $G \cdot x$ は同値関係 $\sim$ に関する x の同値類である．

(2) 各 $x \in X$ に対し，固定部分群 G_x は G の部分群である．

証明.

(1) 関係 $\sim$ が同値関係であれば，G 軌道 $G \cdot x$ が $\sim$ に関する x の同値類であることは定義から明らかである．よって，$\sim$ が同値関係であること，つまり，反射律，対称律，推移律を満たすことをチェックすればよい．

(反射律) 任意の $x \in X$ に対して，$x = e \cdot x$ なので (e は G の単位元)，$x \sim x$ である．

(対称律) $x \sim y$ であるとき，ある $g \in G$ が存在して，$x = g \cdot y$．このとき

$$g^{-1} \cdot x = g^{-1} \cdot (g \cdot y) = (g^{-1}g) \cdot y = e \cdot y = y$$

となるので，$y \sim x$．

(推移律) $x \sim y$ かつ $y \sim z$ であるとき，ある $g_1, g_2 \in G$ が存在して，$x = g_1 \cdot y, y = g_2 \cdot z$．このとき，

$$x = g_1 \cdot y = g_1 \cdot (g_2 \cdot z) = (g_1 g_2) \cdot z$$

となるので，$x \sim z$． □

(2) まず，$e \cdot x = x$ なので，$e \in G_x$ であるから G_x は空ではない．任意の $g_1, g_2 \in G_x$ に対し，

$$(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = g_1 \cdot x = x$$

となるので，$g_1, g_2 \in G_x$．また，任意の $g \in G_x$ に対し，

$$g^{-1} \cdot x = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1} g) \cdot x = e \cdot x = x.$$

となるので，$g^{-1} \in G_x$．以上より，G_x は二項演算と逆元を取る操作について閉じている空でない集合なので，G の部分群である．□

命題 11.5 (1) と同値関係の一般論 (第 7 回講義資料命題 6.3) より，X は互いに交わりのない G-軌道に分割されることがわかる．これを，X の**軌道分解**という．軌道と固定部分群の関係については次の定理が重要である．

定理 11.6 (軌道・固定群定理 Orbit-stabilizer theorem)

$G \times X \to X,\ (g, x) \mapsto g \cdot x$ を集合 X 上の群 G の作用とする．このとき，任意の $x \in X$ に対し，

$$f_x \colon G/G_x \to G \cdot x,\ gG_x \mapsto g \cdot x$$

は well-defined な全単射写像となる．(ここで，$G \cdot x$ は X の部分集合で群ではなく，G_x は一般には正規部分群では無いので G/G_x も一般には群構造を持たない単なる商集合であることに注意！このため，これは群同型ではなく，単なる全単射写像である．) これより，特に

$$(G : G_x) = |G \cdot x|$$

である．ただし，左辺は G_x の G における指数である (第 6 回講義資料定義 6.6).

証明． f_x の well-defined 性：

$$g_1 G_x = g_2 G_x \text{であるとき，} g_1 \cdot x = g_2 \cdot x$$

となることを示せばよい．$g_1 G_x = g_2 G_x$ のとき，$g_1 \overset{G_x}{\sim}_L g_2$ なので (この記号については第 7 回講義資料定義 6.4 を参照)，ある $h \in G_x$ が存在して，$g_1 = g_2 h$．これより，

$$g_1 \cdot x = (g_2 h) \cdot x = g_2 \cdot (h \cdot x) = g_2 \cdot x$$

となる．

f_x の全単射性：全射性は写像の定義から明らかなので，単射性を示す．$g_1 G_x \neq g_2 G_x$ とする．このとき，$g_1^{-1} g_2 \notin G_x$ なので，$x \neq (g_1^{-1} g_2) \cdot x$．このとき，命題 11.2 (1) で考えた ϕ_g の全単射性より，

$$f_x(g_1 G_x) = g_1 \cdot x = \phi_{g_1}(x) \neq \phi_{g_1}((g_1^{-1} g_2) \cdot x) = g_1 \cdot ((g_1^{-1} g_2) \cdot x) = (g_1 g_1^{-1} g_2) \cdot x = g_2 \cdot x = f_x(g_2 G_x).$$

よって，f_x は単射である．

このとき，$(G : G_x) = |G \cdot x|$ であることは，指数の定義を思い出せば直ちにわかる．□

以下は軌道・固定群定理と Lagrange の定理 (第 8 回講義資料定理 7.2) から直ちにわかる．

系 11.7

G を有限群とし，$G \times X \to X,\ (g, x) \mapsto g \cdot x$ を集合 X 上の G の作用とする．このとき，任意の $x \in X$ に対し，

$$|G \cdot x| = (G : G_x) = \frac{|G|}{|G_x|}$$

であり，特に各 G-軌道に含まれる元の個数は G の位数の約数である．

例 7. 例 1 の作用を考える．このとき，任意の $k \in X = \{1, 2, \dots, n\}$ に対し，$(1\ k) \cdot 1 = k$ となるので，1 の $\mathfrak{S}_n$-軌道は

$$\mathfrak{S}_n \cdot 1 = \{\sigma \cdot 1 \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\} = \{1, 2, \dots, n\} = X$$

となる．つまり，このとき X は 1 つの $\mathfrak{S}_n$-軌道からなっている[*4]．また，固定部分群 $(\mathfrak{S}_n)_1$ は

$$(\mathfrak{S}_n)_1 = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma \cdot 1 = 1\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \;\middle|\; i_2, \dots, i_n \text{は } 2, \dots, n \text{ の並べ替え} \right\}$$

となる．とくに，$|(\mathfrak{S}_n)_1| = (n-1)!$ であり，確かに，

$$(\mathfrak{S}_n : (\mathfrak{S}_n)_1) = \frac{|\mathfrak{S}_n|}{|(\mathfrak{S}_n)_1|} = \frac{n!}{(n-1)!} = n = |X| = |\mathfrak{S}_n \cdot 1|$$

となっている (系 11.7).

例 8. 例 4 で考えた作用

$$\psi\colon GL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

を考える ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ とした)．このとき，

$$\begin{aligned} GL_2(\mathbb{R}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \\ GL_2(\mathbb{R}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \right\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\} \end{aligned}$$

となるので，$\mathbb{R}^2$ の軌道分解は

$$\mathbb{R}^2 = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\} \cup \left(\mathbb{R}^2 \setminus \{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\}\right) = GL_2(\mathbb{R}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cup GL_2(\mathbb{R}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり，$\mathbb{R}^2$ は 2 つの $GL_2(\mathbb{R})$-軌道からなっていることがわかる．また，

$$\begin{aligned} GL_2(\mathbb{R})_{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = GL_2(\mathbb{R}), \\ GL_2(\mathbb{R})_{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \;\middle|\; b, d \in \mathbb{R}, d \neq 0 \right\} \end{aligned}$$

となる．この例からもわかるようにある元の固定部分群が群全体になるということは，その元が群作用で一切動かないということに対応する．軌道・固定群定理より，

$$\begin{aligned} &GL_2(\mathbb{R})/GL_2(\mathbb{R})_{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} = GL_2(\mathbb{R})/GL_2(\mathbb{R}) = \{GL_2(\mathbb{R})\} \to \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},\ GL_2(\mathbb{R}) \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ &GL_2(\mathbb{R})/GL_2(\mathbb{R})_{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\},\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot GL_2(\mathbb{R})_{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

はともに全単射写像である.

例 9. 例 4 で考えた作用

$$\psi'\colon GL_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}),\ (P, A) \mapsto PAP^{-1}$$

を考える ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とした)．各 $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ のこの作用に関する軌道

$$\{PAP^{-1} \mid P \in GL_n(\mathbb{C})\}$$

の中に対角行列が含まれるとき，A を**対角化可能**というのであった (線形代数 II の内容の言い換え)．対角化可能性は固有多項式 $\Phi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ の各根の重複度とそれに対応する固有空間の次元が等しいかどうかで判定できた (全て等しいとき対角化可能) という話を思い出しておこう.

[*4] このように，群 G が作用している集合 X が 1 つの軌道からなっている (="群作用によって，集合内の任意の 2 元間を移動できる") とき，この作用は**推移的 (transitive)** であり，X は G の**等質空間 (homogeneous space)** であるという.

例 10. G を群とする．例 6 で考えた随伴作用 $\psi_{\mathrm{ad}}\colon G\times G\to G,\ (g,h)\mapsto ghg^{-1}$ を考える．このとき，各元 $h\in G$ の随伴作用に関する軌道
$$K(h):=\{ghg^{-1}\mid g\in G\}$$
を h の**共役類 (conjugacy class)** という[*5]．軌道分解可能性から，G は互いに交わりのない共役類に分割されることがわかる．またこのとき，各 $h\in G$ における固定部分群 G_h は
$$G_h=\{g\in G\mid ghg^{-1}=h\}=\{g\in G\mid gh=hg\}=Z(\{h\})$$
となる (最後は $\{h\}$ の中心化群．第 6 回講義資料定義 5.10 参照)．よって，系 11.7 より，
$$|K(h)|=(G:Z(\{h\}))$$
となる．

例として，3 次二面体群 D_3 の共役類を全て求めてみよう．最初に単位元 e の共役類を考えると，
$$K(e)=\{geg^{-1}\mid g\in D_3\}=\{e\}$$
(同じ理由で任意の群 G において $K(e)=\{e\}$ となる.) 次に ($K(e)$ に含まれない元であれば何でも良いが)，$\sigma\in D_3$ の共役類を考えると，
$$\begin{aligned}K(\sigma)&=\{\sigma^k\sigma(\sigma^k)^{-1},(\sigma^k\tau)\sigma(\sigma^k\tau)^{-1}\mid k=0,1,2\}\\&=\{\sigma,\sigma^{-1}\}=\{\sigma,\sigma^2\}.\end{aligned}$$
ちなみに，共役類は随伴作用の定める同値関係に関する同値類なので，$\sigma^2\in K(\sigma)$ であることから，$K(\sigma)=K(\sigma^2)$ であることにも注意する．次に ($K(e)$，$K(\sigma)$ のいずれにも含まれない元であれば何でも良いが)，$\tau\in D_3$ の共役類を考えると，
$$\begin{aligned}K(\tau)&=\{\sigma^k\tau(\sigma^k)^{-1},(\sigma^k\tau)\tau(\sigma^k\tau)^{-1}\mid k=0,1,2\}\\&=\{\tau,\sigma^2\tau,\sigma^4\tau\}=\{\tau,\sigma\tau,\sigma^2\tau\}.\end{aligned}$$
ここで，$\sigma^3=e$ を用いた．以上で D_3 の全ての元がいずれかの共役類の中に現れたので，D_3 の共役類への分割が $D_3=K(e)\cup K(\sigma)\cup K(\tau)$ となることがわかる．よって，D_3 の共役類は $K(e)$，$K(\sigma)$，$K(\tau)$ で全てである．

11.2 群の作用の応用 (やや発展)

最後に群作用の応用としてわかる定理を 2 つ紹介して講義資料を締めくくろう．(ただし，以下の内容は時間的に講義内では扱えない可能性が高い．質問のある方は講義前後の時間に是非質問をしてもらいたい．)

定理 11.8

p を素数とする．このとき，位数 p^k(k は 1 以上の整数) の群[*6]G の中心 $Z(G)$ は $Z(G)\neq\{e\}$ となる．つまり，このような群においては必ず単位元以外に全ての元と可換性を持つ元が存在する．

証明. G の共役類への分割を，
$$K(e)\cup K(g_1)\cup K(g_2)\cup\cdots\cup K(g_m)$$
とする．(ただし，$i\neq j$ のとき，$K(g_i)\neq K(g_j)(\neq K(e))$ となるとする．)

[*5] 共役類のありがたみは P.5 の注意で述べた表現論を学ぶと非常に良く分かる．興味のある方は是非勉強してみて欲しい．

[*6] 位数が素数 p の自然数べきであるような群を p **群 (p-group)** という．例えば，4 次 2 面体群 D_4 は位数 $8=2^3$ なので，2-群である．実際 D_4 においては $Z(D_4)=\{e,\sigma^2\}$ である．

背理法で証明する．もし，$Z(G)=\{e\}$ となるとすると，全ての $\ell=1,\ldots,m$ に対し，$K(g_\ell)\neq\{g_\ell\}$ となる．なぜなら，$K(g_\ell)=\{g_\ell\}$ は，共役類の定義から任意の $g\in G$ に対して，$gg_\ell g^{-1}=g_\ell$ となることを意味するので，このとき，任意の $g\in G$ に対して $gg_\ell=g_\ell g$ で，$g_\ell\in Z(G)$ となるからである．よって，全ての $\ell=1,\ldots,m$ に対し，$|K(g_\ell)|>1$ である．一方，共役類は随伴作用に関する G-軌道なので，系 11.7 から，$|K(g_\ell)|$ は $|G|=p^k$ の約数である．よって，各 $\ell=1,\ldots,m$ に対し，$|K(g_\ell)|$ は p の倍数となる．よって，

$$p^k=|G|=|K(e)|+|K(g_1)|+\cdots+|K(g_m)|\equiv|K(e)|=|\{e\}|=1\mod p$$

となり，これは矛盾である．以上より，$Z(G)\neq\{e\}$. □

次に紹介する応用は Sylow の定理と呼ばれ，群の分類問題を扱う際に非常に便利になる定理である[*7]：

定理 11.9 (Sylow の定理)

p を素数，G を有限群とし，G の位数が p^ℓ では割り切れるが，$p^{\ell+1}$ では割り切れなかったとする．(ただし ℓ は正の整数．) このとき，任意の $1\leq k\leq\ell$ に対し，G は位数 p^k の部分群を持つ．

Sylow の定理より，特に G は位数 p^ℓ の部分群をもつ．これを **p-Sylow 部分群 (p-Sylow subgroup)** という．

証明． 仮定より，G の位数は $p^\ell n$(ただし，p と n は互いに素) という形で書かれる．

$$X\coloneqq\{\{g_1,\ldots,g_{p^k}\}\subset G\mid g_1,\ldots,g_{p^k}\text{は相異なる }G\text{ の }p^k\text{個の元}\}$$

としたとき，

$$G\times X\to X,(g,\{g_1,\ldots,g_{p^k}\})\mapsto\{gg_1,\ldots,gg_{p^k}\}$$

は X 上の G の作用を定める (チェックせよ)．このとき，各 $\{g_1,\ldots,g_{p^k}\}\in X$ の固定部分群は定義より，

$$G_{\{g_1,\ldots,g_{p^k}\}}=\left\{g\in G\mid\{gg_1,\ldots,gg_{p^k}\}=\{g_1,\ldots,g_{p^k}\}\right\}$$

であるので，各 $g\in G_{\{g_1,\ldots,g_{p^k}\}}$ に対してある $i\in\{1,\ldots,p^k\}$ が定まり，$gg_1=g_i$ となる．このとき，$g=g_ig_1^{-1}$ となるので，

$$G_{\{g_1,\ldots,g_{p^k}\}}\subset\{g_ig_1^{-1}\mid i=1,\ldots,p^k\}.$$

特に，$|G_{\{g_1,\ldots,g_{p^k}\}}|\leq p^k$ である．ここで，$|G_{\{g_1,\ldots,g_{p^k}\}}|=p^k$ となるものが存在することを示せば，固定部分群 $G_{\{g_1,\ldots,g_{p^k}\}}$ が G の位数 p^k の部分群となり，示すべきことが示される．

Lagrange の定理より $|G_{\{g_1,\ldots,g_{p^k}\}}|$ の値は $|G|=p^\ell n$ の約数なので，$|G_{\{g_1,\ldots,g_p\}}|<p^k$ とすると特にこれは $p^{k-1}n$ の約数である．いま各 $\{g_1,\ldots,g_{p^k}\}\in X$ に対し，系 11.7 から，

$$|G\cdot\{g_1,\ldots,g_{p^k}\}|=\frac{|G|}{|G_{\{g_1,\ldots,g_{p^k}\}}|}=\frac{p^\ell n}{|G_{\{g_1,\ldots,g_{p^k}\}}|}$$

が成立するので，以上の考察から，$|G\cdot\{g_1,\ldots,g_p\}|$ は $p^{\ell-k+1}$ の倍数 ($|G_{\{g_1,\ldots,g_{p^k}\}}|<p^k$ のとき)，または $p^{\ell-k}n$ ($|G_{\{g_1,\ldots,g_{p^k}\}}|=p^k$ のとき) となる．これより，もし $|G_{\{g_1,\ldots,g_{p^k}\}}|=p^k$ となる $\{g_1,\ldots,g_{p^k}\}\in X$ が存在しないと仮定すると，X を軌道分解したときに元の個数が $p^{\ell-k+1}$ の倍数の軌道で軌道分解されるので，特に $|X|$ は $p^{\ell-k+1}$ の倍数となる．今示したかったことは，$|G_{\{g_1,\ldots,g_{p^k}\}}|=p^k$ となるものの存在なので，あとは $|X|$ が $p^{\ell-k+1}$ の倍数でないことを示せば良い．

いま，

$$|X|={}_{p^\ell n}\mathrm{C}_{p^k}=\frac{p^\ell n(p^\ell n-1)\cdots(p^\ell n-p^k+1)}{p^k(p^k-1)\cdots1}=p^{\ell-k}n\cdot\frac{(p^\ell n-1)\cdots(p^\ell n-p^k+1)}{(p^k-1)\cdots1}$$

である．ここで，$m\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し，$\ell(m)$ を

[*7] 実はこの定理には続きがあり，群の分類問題を扱う上ではそこまで知っているとより良い．興味のある方は是非調べてみてほしい．(例えば，雪江明彦 著 「代数学 1 群論入門」 (日本評論社) の定理 4.5.7 参照．)

$$m \text{ は } p^{\ell(m)} \text{ で割り切れるが } p^{\ell(m)+1} \text{ では割り切れない}$$

という条件で定まる 0 以上の整数とすると，定義より $p^{-\ell(m)}m$ は p で割り切れない整数であり，$m = 1, 2, \ldots, p^k - 1$ のとき $\ell(m) < k$ である．よって，

$$\begin{aligned}
&\frac{(p^\ell n - 1)\cdots(p^\ell n - p^k + 1)}{(p^k - 1)\cdots 1} \\
&= \frac{(p^{\ell-\ell(1)}n - p^{-\ell(1)}1)\cdots(p^{\ell-\ell(m)}n - p^{-\ell(m)}m)\cdots(p^{\ell-\ell(p^k-1)}n - p^{-\ell(p^k-1)}(p^k-1))}{(p^{k-\ell(1)} - p^{-\ell(1)}1)\cdots(p^{k-\ell(m)} - p^{-\ell(m)}m)\cdots(p^{k-\ell(p^k-1)} - p^{-\ell(p^k-1)}(p^k-1))}.
\end{aligned}$$

ここで，右辺の分子分母の積の各項は整数であることに注意する．このとき，右辺の分子に現れる $(p^{\ell-\ell(m)}n - p^{-\ell(m)}m)$，$m = 1, \ldots, p^k - 1$ という形の整数は $p^{\ell-\ell(m)}n$ が p の倍数，$-p^{-\ell(m)}m$ が p で割り切れない整数であることより，p で割り切れない整数である．よって，それらの積である右辺の分子は p で割り切れず，それをさらに整数で割って得られる数である右辺の値は p の倍数ではない.

以上より，$\dfrac{(p^\ell n - 1)\cdots(p^\ell n - p^k + 1)}{(p^k - 1)\cdots 1}$ は p の倍数ではないことが示され，さらに p と n は互いに素であることより，結局 $|X|$ は $p^{\ell-k+1}$ の倍数ではないことがわかった．よって，示すべきことは全て示された． □