

代数学 I 第 2 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

$6^6 \times 15^{15} \times 20^{20}$ を 7 で割った余りを求めよ。

問題 1 解答例. $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ において, $[6^6 \times 15^{15} \times 20^{20}]_7 = [r]_7$ を満たす $r(0 \leq r < 7)$ が求める余りである.

$$\begin{aligned} [6^6 \times 15^{15} \times 20^{20}]_7 &= [6]_7^6 \times [15]_7^{15} \times [20]_7^{20} \\ &= [-1]_7^6 \times [1]_7^{15} \times [(-1)]_7^{20} \\ &= [(-1)^6 \times 1^{15} \times (-1)^{20}]_7 \\ &= [1]_7 \end{aligned}$$

より, 求める余りは 1 である. □

問題 1 補足解説. この種の計算は “mod” を使う演算として既に行ったことがある方も多いと思うが, ここでは今回勉強した $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ という言葉で解答を書いてみた. やっていることは “mod” と同じである. このような計算ができるためには, $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ において積 $[a]_7 \times [b]_7 = [ab]_7$ が well-defined であることが重要であったことに注意しよう. ちなみに, $6^6 \times 15^{15} \times 20^{20} = 21422803359744000000000000000000000000000000000000$ である. □

問題 2

$987x + 1176y = 63$ を満たす整数の組 (x, y) を全て求めよ。

問題 2 解答例. まず, $\gcd(987, 1176)$ をユークリッド互除法で求める:

$$\begin{aligned} 1176 &= 1 \times 987 + 189 & 987 &= 5 \times 189 + 42 \\ 189 &= 4 \times 42 + 21 & 42 &= 2 \times 21 + 0 \end{aligned}$$

であるので, $\gcd(987, 1176) = 21$. よって, $987x'_0 + 1176y'_0 = 21$ を満たす整数の組 (x'_0, y'_0) が存在し, その 1 つは以下のように求められる.

$$\begin{aligned} 21 &= 189 - 4 \times 42 \\ &= 189 + (-4) \times (987 - 5 \times 189) \\ &= 21 \times 189 + (-4) \times 987 \\ &= 21 \times (1176 - 1 \times 987) + (-4) \times 987 \\ &= (-25) \times 987 + 21 \times 1176 \end{aligned}$$

より, $(x'_0, y'_0) = (-25, 21)$ が $987x'_0 + 1176y'_0 = 21$ を満たす整数の組の例である. これより, それぞれ $3 (= 63/21)$ 倍して, $(x_0, y_0) = (-75, 63)$ が $987x_0 + 1176y_0 = 63$ を満たす整数の組の例である. これより,

$$\begin{aligned} 987x + 1176y = 63 &\Leftrightarrow 987(x - (-75)) + 1176(y - 63) = 0 \\ &\Leftrightarrow 47(x + 75) + 56(y - 63) = 0 \text{ (両辺を } \gcd(987, 1176) = 21 \text{ で割る)} \\ &\Leftrightarrow \text{ある } m \in \mathbb{Z} \text{ を用いて, } (x + 75, y - 63) = (56m, -47m) \end{aligned}$$

となるので, 求める整数の組は, $(x, y) = (-75 + 56m, 63 - 47m), m \in \mathbb{Z}$. □

* e-mail: hoya@shibaura-it.ac.jp

問題 2 補足解説. 代数学第 1, 2 解講義資料の P.6 にある方法をそのまま行えばよい. この種の問題では求めた答えが, 確かに条件を満たすか ($987x + 1176y = 63$ を満たすか) 必ず確認すること. □