代数学 I 第 4 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

一般線型群

$$GL_2(\mathbb{C}) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

を考える．次の部分集合 G_1, G_2, G_3, G_4 が，それぞれ $GL_2(\mathbb{C})$ の

(a) 部分群となる　　　　(b) 部分群とならない

のどちらになるかを選び，その理由を説明せよ．

(1) $G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}) \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$.

(2) $G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}) \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$.

(3) $G_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}) \middle| a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad \neq 0, bc = 0 \right\}$.

(4) $G_4 = \left\{ A \in GL_2(\mathbb{C}) \middle| {}^tAA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

問題 1 解答例.

(1) (b) 部分群とならない．

理由：部分群であるためには任意の $A \in G_1$ の元に対して，$A^{-1} \in G_1$ である必要がある．しかし，例えば $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in G_1$ に対し，

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

となり，これは成分が整数でないので，G_1 の元ではない． □

(2) (a) 部分群となる．

理由：G_2 は単位行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を含むので空ではない．任意の $A, B \in G_2$ に対し，行列の積の定義から AB の各成分も整数であり，さらに $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 1 \cdot 1 = 1$ である．よって，$AB \in G_2$．さらに，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G_2$ に対し，

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

より A^{-1} の各成分も整数であり，さらに $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} = 1^{-1} = 1$ である．よって，$A^{-1} \in G_2$．以上より，G_2 は $GL_2(\mathbb{C})$ の部分群である． □

(3) (b) 部分群とならない．

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

理由：部分群であるためには任意の $A, B \in G_3$ の元に対して，$AB \in G_3$ である必要がある．しかし，例えば $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in G_3$ に対し，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

となり，これは $1 \cdot 1 \neq 0$ より，G_3 の元ではない． □

(4) (a) 部分群となる．

理由：単位行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を満たすので，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_4$ である．特に G_4 は空ではない．任意の $A, B \in G_4$ に対し，転置の性質と仮定から，

$${}^t(AB)(AB) = {}^tB{}^tAAB = {}^tB \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B = {}^tBB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

よって，$AB \in G_4$．さらに，${}^tAA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ なので，${}^tA = A^{-1}$ であるから，

$${}^t(A^{-1})A^{-1} = {}^t(A^{-1}){}^tA = {}^t(AA^{-1}) = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

よって，$A^{-1} \in G_4$．以上より，G_4 は $GL_2(\mathbb{C})$ の部分群である． □

問題 1 補足解説. 群 G の空でない部分集合 H が G の部分群であることの必要十分条件は、

『任意の $h, k \in H$ に対し、$hk \in H$ かつ $h^{-1} \in H$ となること』

であった．このため，部分群であることを確かめるときはこの条件を確認すればよい．G_1 は二項演算では閉じているが逆元を取る操作では閉じていない部分集合，G_3 は逆元を取る操作では閉じているが二項演算では閉じていない部分集合の例である．

ちなみに，2 以上の整数 n に対し，(2) と同様の方法で

$$\{A \in GL_n(\mathbb{C}) \mid A \text{ の成分は全て整数で}, \det(A) = 1\}$$

は $GL_n(\mathbb{C})$ の部分群となることがわかる．これは $SL_n(\mathbb{Z})$ と書かれる．問題 1 の G_2 は $SL_2(\mathbb{Z})$ である．

また，(4) と同様の方法で，

$$\{A \in GL_n(\mathbb{K}) \mid {}^tAA = I_n\}$$

も $GL_n(\mathbb{K})$ の部分群となることがわかる ($\mathbb{K}$ は $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 又は $\mathbb{C}$)．これは，**直交群 (orthogonal group)** と呼ばれ，$O_n(\mathbb{K})$ と書かれる．問題 1 の G_4 は $O_2(\mathbb{C})$ である． □

線形代数の復習 (本講義の範囲では証明無しに用いてよい)

- (行列式 det と行列の積の関係)　n を正の整数とする．$n \times n$ 行列 A に対して，$\det(A)$ を A の行列式とする．このとき，$n \times n$ 行列 A, B に対し，

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

である．特に，$\det(A) \neq 0$ のとき，A^{-1} が存在して，$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ である．

- (2×2 行列の逆行列の一般形) 行列式 $ad - bc$ が 0 でない 2×2 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し，その逆行列は

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

である．

- 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ に対し，(i, j) 成分を a_{ji} としたものを，

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

と書き，A の転置行列という．$\ell \times m$ 行列 A，$m \times n$ 行列 B に対し，

$${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$$

となる．また，正則 $n \times n$ 行列 A に対し，${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$ である．

復習：行列式

n を正の整数とする．$n \times n$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$$

に対して，A の行列式 $\det(A)$ は以下で定義される：

$$\det(A) \coloneqq \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

ここで，$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^k$．ただし，$k$ は σ に対応するあみだくじを書いたときの横棒の本数の数 (σ に対応するあみだくじは無数にあるが，横棒の本数の偶奇は表し方にはよらない)．