代数学 I 第 5 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

3 次対称群 $\mathfrak{S}_3$ の単位元以外の全ての元

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

を隣接互換 $(1\ 2)$, $(2\ 3)$ の何回かの合成で表せ.

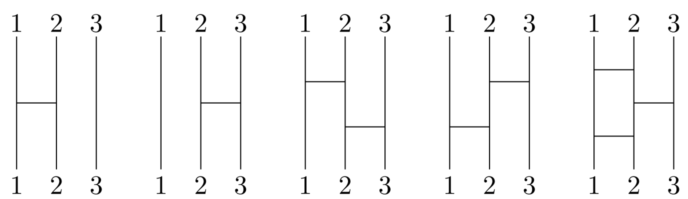
問題 1 解答例.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=(1\ 2) \qquad \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=(2\ 3) \qquad \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=(2\ 3)(1\ 2)$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=(1\ 2)(2\ 3) \qquad \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=(1\ 2)(2\ 3)(1\ 2)\ (=(2\ 3)(1\ 2)(2\ 3))$$

□

問題 1 補足解説. 対称群の任意の元は隣接互換の何回かの合成として書かれる．第 5 回講義資料 p.3–4 の注意で解説した内容により，これは任意の対称群の元に対して，対応する『あみだくじ』が取れるという事実に他ならない．対称群の各元を隣接互換の合成で書く方法は対応するあみだくじを考えると求めやすいであろう．$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$ に対応するあみだくじはこの順に以下のようにとれる：



隣接互換が横棒 1 本に対応していることと,『あみだくじの連結と二項演算の関係』を考えることにより，この図から求める解答が得られる． □

問題 2

3 次二面体群 D_3 の部分群を全て列挙せよ.

問題 2 解答例. $\{e\},\{e,\sigma,\sigma^2\},\{e,\tau\},\{e,\sigma\tau\},\{e,\sigma^2\tau\},D_3$. □

問題 2 補足解説. まず，部分群は単位元を含んでいる必要があるので (第 4 回講義資料命題 3.4 (3))，単位元を含む D_3 の部分集合を考える：$\{e\}$, $\{e,\sigma\}$, $\{e,\sigma^2\}$, $\{e,\tau\}$, $\{e,\sigma\tau\}$, $\{e,\sigma^2\tau\}$, $\{e,\sigma,\sigma^2\}$, $\{e,\sigma,\tau\}$, $\{e,\sigma,\sigma\tau\}$, $\{e,\sigma,\sigma^2\tau\}$, $\{e,\sigma^2,\tau\}$, $\{e,\sigma^2,\sigma\tau\}$, $\{e,\sigma^2,\sigma^2\tau\}$, $\{e,\tau,\sigma\tau\}$, $\{e,\tau,\sigma^2\tau\}$, $\{e,\sigma\tau,\sigma^2\tau\}$, $\{e,\sigma,\sigma^2,\tau\}$, $\{e,\sigma,\sigma^2,\sigma\tau\}$, $\{e,\sigma,\sigma^2,\sigma^2\tau\}$, $\{e,\sigma,\tau,\sigma\tau\}$, $\{e,\sigma,\tau,\sigma^2\tau\}$, $\{e,\sigma,\sigma\tau,\sigma^2\tau\}$, $\{e,\sigma^2,\tau,\sigma\tau\}$, $\{e,\sigma^2,\tau,\sigma^2\tau\}$,

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

$\{e, \sigma^2, \sigma\tau, \sigma^2\tau\}$, $\{e, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau\}$, $\{e, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma\tau\}$, $\{e, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma^2\tau\}$, $\{e, \sigma, \sigma^2, \sigma\tau, \sigma^2\tau\}$, $\{e, \sigma, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau\}$, $\{e, \sigma^2, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau\}$, D_3.

このうち，二項演算と逆元を取る操作について閉じているものを選べばよい．ほとんどのものは，明らかにこれらで閉じていないとわかるようなものなので，見た目ほど大変ではないであろう．

なお，二項演算と逆元を取る操作について閉じるかどうかを沢山チェックして慣れて欲しいという意図で本問を出題したが，講義がもう少し進むとこの問題はもっと簡単に解答できるようになる (お楽しみに！)．概略は以下のようなものである：

まず，実は「部分群の位数は全体の群の位数の約数になるしかない」という事実を学ぶ (Lagrange の定理)．これにより，自明でない部分群の位数は 2 か 3 であることがわかり，元の個数が 4 つや 5 つの部分集合は初めから考えなくてよいということになる．さらに，位数が 2 や 3 の群は『巡回群』と呼ばれるもの (第 6 回講義資料，定義 5.6 参照) しかないということも学ぶ．そうすると結局自明でない部分群は，D_3 の各元によって生成される (第 6 回講義資料，定義 5.5 参照) ものだけであるということがわかる． □