代数学 I 第 6 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

以下の問に答えよ．

(1) n 次対称群 $\mathfrak{S}_n (n \geq 2)$ における以下の元は再び巡回置換となる．その結果を $(j_1\ j_2\ \cdots j_k)$ の形の記法を用いて表せ (計算過程も説明せよ)．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \circ (1\ 2\ \cdots\ n) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}^{-1}$$

(2) $\mathfrak{S}_4$ における $\{(1\ 2\ 3\ 4)\}$ の中心化群 $Z(\{(1\ 2\ 3\ 4)\})$ を具体的に求めよ (答えのみで良い)．

問題 1 解答例.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}^{-1}$ は i_k を k に送る写像 $\{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ であることに注意すると，各 $k = 1, \dots, n$ に対して，i_k の行き先を考えると，

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \circ (1\ 2\ \cdots\ n) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}^{-1}\right\}(i_k) \\
&= \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \circ (1\ 2\ \cdots\ n)\right\}(k) \\
&= \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}(k+1) & k = 1, \dots, n-1 \text{ のとき}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}(1) & k = n \text{ のとき}, \end{cases} \\
&= \begin{cases} i_{k+1} & k = 1, \dots, n-1 \text{ のとき}, \\ i_1 & k = n \text{ のとき}. \end{cases}
\end{aligned}$$

となる．これより，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \circ (1\ 2\ \cdots\ n) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}^{-1} = (i_1\ i_2\ \cdots\ i_n)$$

である． □

(2)

$$\begin{aligned}
Z(\{(1\ 2\ 3\ 4)\}) &= \{e, (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 3\ 4)^2, (1\ 2\ 3\ 4)^3\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}$$

□

問題 1 補足解説.

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

(1) (1) と同様の方法により，一般に $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ と巡回置換 $(i_1\ i_2\ \cdots\ i_k)$ に対し，

$$\sigma \circ (i_1\ i_2\ \cdots\ i_k) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\ \sigma(i_2)\ \cdots\ \sigma(i_k))$$

となることがわかる．また，より一般に (巡回置換とは限らない) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n$ に対して，$\sigma \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \circ \sigma^{-1}$ は $\sigma(k)$ を $\sigma(i_k)$ に送る写像となる．

(2) 定義より，

$$\begin{aligned} Z(\{(1\ 2\ 3\ 4)\}) &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_4 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{pmatrix} \circ (1\ 2\ 3\ 4) = (1\ 2\ 3\ 4) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_4 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{pmatrix} \circ (1\ 2\ 3\ 4) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{pmatrix}^{-1} = (1\ 2\ 3\ 4) \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_4 \,\middle|\, (i_1\ i_2\ i_3\ i_4) = (1\ 2\ 3\ 4) \right\}. \quad ((1)\text{ より}) \end{aligned}$$

ここで，$(i_1\ i_2\ i_3\ i_4) = (1\ 2\ 3\ 4)$ を満たす (i_1, i_2, i_3, i_4) は，

$$(i_1, i_2, i_3, i_4) = (1,2,3,4), (2,3,4,1), (3,4,1,2), (4,1,2,3)$$

である．よって，

$$Z(\{(1\ 2\ 3\ 4)\}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

である． □

※補足：講義資料命題 5.3 の "逆" の反例

命題 5.3 では $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$ が互いに素な巡回置換であるとき，

$$\sigma\sigma' = \sigma'\sigma$$

が成立するということを述べた．これの逆，つまり，『$\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$ がどちらも単位元でない相異なる巡回置換とし，$\sigma\sigma' = \sigma'\sigma$ が成立するならば，σ と σ' は互いに素である．』は成立するするかという質問が講義内で出たので，ここで回答しておこう．この逆は一般には成立しない！例えば，次のような例がある (以下の計算には問題 1(1) の補足解説の考察を用いればよい)：

- $(1\ 3\ 2) \circ (1\ 2\ 3) \circ (1\ 3\ 2)^{-1} = (3\ 1\ 2) = (1\ 2\ 3)$ より，$(1\ 3\ 2) \circ (1\ 2\ 3) = (1\ 2\ 3) \circ (1\ 3\ 2)$.
- $(1\ 3\ 5\ 2\ 4) \circ (1\ 2\ 3\ 4\ 5) \circ (1\ 3\ 5\ 2\ 4)^{-1} = (3\ 4\ 5\ 1\ 2) = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ より，$(1\ 3\ 5\ 2\ 4) \circ (1\ 2\ 3\ 4\ 5) = (1\ 2\ 3\ 4\ 5) \circ (1\ 3\ 5\ 2\ 4)$.

このような例は無数に作ることができる．どのように考えれば作ることができるか考えてみると面白いだろう．