代数学 I 第 7 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

3 次対称群 $\mathfrak{S}_3$ とその部分群 $H := \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ に関する以下の問に答えよ．ただし，解答は全て答えのみで良い：

(1) $\mathfrak{S}_3$ における H による左剰余類 ($\mathfrak{S}_3/H$ の元) を全て記述せよ．

(2) $\mathfrak{S}_3$ の H に関する左完全代表系を 1 つ記述せよ．

(3) $\mathfrak{S}_3$ における H の指数 $(\mathfrak{S}_3 : H)$ はいくらか．

問題 1 解答例．

(1) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$ □

(2) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$

((1) の全ての集合から 1 つずつ元を抜き出していれば何でも正解) □

(3) $(\mathfrak{S}_3 : H) = 3.$ □

問題 1 補足解説． まず，

$$H = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^m \,\middle|\, m \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

である．左剰余類を全て列挙する際には例えば次のように考えれば良い：

最初に単位元 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ の H による左剰余類を考えると，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} H &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sigma \,\middle|\, \sigma \in H \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

となる．次に，上の $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} H$ には含まれない元，例えば $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ の H による左剰余類を考えると，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} H &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sigma \,\middle|\, \sigma \in H \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

となる．次に，ここまでで既に見た $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} H \cup \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix} H$ には含まれない元，例えば $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ の H による左剰余類を考えると，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix} H &= \left\{ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix} \sigma \;\middle|\; \sigma \in H \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix} \right\}\end{aligned}$$

となる．以上で $\mathfrak{S}_3$ の全ての元が現れたので，$\mathfrak{S}_3$ の H による左剰余類への分割が，

$$\mathfrak{S}_3 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} H \cup \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix} H \cup \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix} H$$

と得られたことになる．これより，

$$\mathfrak{S}_3/H = \left\{ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} H, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix} H, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix} H \right\}$$

である．

一般に群 G の部分群 H に関する左完全代表系は，G/H **の全ての元からちょうど 1 つづつ**元を抜き出してくれば良く，右完全代表系は，$H\backslash G$ **の全ての元からちょうど 1 つづつ**元を抜き出してくれば良い．

指数 $(G : H)$ は定義から商集合 G/H の元の個数である．さらに完全代表系の定義より，G/H の元の個数は G の H に関する左完全代表系の元の個数に等しいので，指数 $(G : H)$ は G の H に関する左完全代表系の元の個数ということもできる． ちなみに，第 8 回講義資料の定理 7.2 (Lagrange の定理) を用いると，

$$(G : H) = \frac{|G|}{|H|}$$

であることがわかるので，指数に関しては具体的な商集合 G/H の様子を調べなくても，G と H の位数のみから計算できる．例えば，問題 1 の場合には，$|\mathfrak{S}_3| = 3! = 6, |H| = 2$ なので，

$$(\mathfrak{S}_3 : H) = \frac{|\mathfrak{S}_3|}{|H|} = \frac{6}{2} = 3$$

と計算できる． □