代数学 I 第 8 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

7 次二面体群 D_7 の部分群を全て列挙せよ．ただし，答えのみではなく考察の過程も記述すること．

問題 1 解答例． まず，$|D_7| = 14$ なので，Lagrange の定理より，D_7 の部分群の位数は $1, 2, 7, 14$ のいずれかである．さらに，位数 1 の部分群は $\{e\}$，位数 14 の部分群は D_7 という自明なものに限られるので，非自明な部分群の位数は 2 か 7 である．ここで，2 と 7 は素数なので，これらは巡回群である．よって，非自明な部分群は D_7 の (単位元でない)1 元で生成される部分群に限られる．これらを具体的に計算してみると，

$$\langle \sigma^k \rangle = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \sigma^5, \sigma^6\},\ k = 1, \ldots, 6, \qquad \langle \sigma^\ell \tau \rangle = \{e, \sigma^\ell \tau\},\ \ell = 0, \ldots, 6.$$

以上より，求める部分群は，

$$\{e\}, \{e, \tau\}, \{e, \sigma\tau\}, \{e, \sigma^2\tau\}, \{e, \sigma^3\tau\}, \{e, \sigma^4\tau\}, \{e, \sigma^5\tau\}, \{e, \sigma^6\tau\}, \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \sigma^5, \sigma^6\}, D_7$$

で全て． □

問題 1 補足解説． 本問は第 8 回講義資料の p.4 の最後に解説した例題の数字を変えた類題である．解答を見ると，一般に p が素数のとき，全く同じ手法で D_p の部分群が

$$\{e\}, \{e, \sigma^\ell \tau\}\ (\ell = 0, \ldots, p-1), \{e, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{p-1}\}, D_p$$

で全てであることがわかるだろう．$\langle \sigma^k \rangle, k = 1, \ldots, p-1$ らが全て $\{e, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{p-1}\}$ に一致することは次のようにわかる：

まず，$\langle \sigma \rangle = \{\sigma^m \mid m \in \mathbb{Z}\} = \{e, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{p-1}\}$ であることは容易にわかる．次に，各 $k = 1, \ldots, p-1$ に対し，

$$\langle \sigma^k \rangle = \{\sigma^{km} \mid m \in \mathbb{Z}\} \subset \langle \sigma \rangle$$

なので，$\langle \sigma^k \rangle$ は $\langle \sigma \rangle$ の部分群である．ここで，$\langle \sigma \rangle$ の位数は素数 p であるので，その部分群は自明なものしかないが，$e \neq \sigma^k \in \langle \sigma^k \rangle$ より，$\langle \sigma^k \rangle \neq \{e\}$ なので，結局 $\langle \sigma^k \rangle = \langle \sigma \rangle$ である．

なお，n が素数でないときは D_n は上記のタイプ以外の部分群も持ち得るので注意すること (どんなものがあるか考えてみよ)． □

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp