代数学 I 第 9 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

一般線型群

$$GL_2(\mathbb{R}) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

を考える．次の部分集合 G_1, G_2, G_3 が，それぞれ $GL_2(\mathbb{R})$ の

(a) 正規部分群となる　　(b) 部分群となるが正規部分群ではない　　(c) 部分群とならない

のどれになるかを選び，その理由を説明せよ．

(1) $G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc > 0 \right\}$.　(2) $G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \geq 1 \right\}$.

(3) $G_3 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\}$.

問題 1 解答例.

(1) (a) 正規部分群となる．

理由：$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_1$ より，G_1 は空ではない．任意の $A, B \in G_1$ に対し，

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) > 0 \qquad \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} > 0$$

より，$AB \in G_1$ かつ $A^{-1} \in G_1$ である．よって，G_1 は $GL_2(\mathbb{R})$ の部分群である．さらに，任意の $C \in GL_2(\mathbb{R})$, $A \in G_1$ に対し，

$$\det(CAC^{-1}) = \det(C)\det(A)\det(C^{-1}) = \det(C)\det(A)\det(C)^{-1} = \det(A) > 0$$

なので，$CAC^{-1} \in G_1$ である．よって，G_1 は $GL_2(\mathbb{R})$ の正規部分群となる． □

(1) 部分群であることを証明した後の正規性の別証明：$GL_2(\mathbb{R})$ の G_1 による左剰余類への分割を考える．

$$G' \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc < 0 \right\}$$

とすると，$GL_2(\mathbb{R}) = G_1 \cup G'$ となる．ここで，任意の $A \in G_1$ に対し，

$$\det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)\det(A) = -\det(A) < 0$$

なので，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A \in G'$ である．よって，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} G_1 \subset G'$．一方，任意の $A' \in G'$ に対し，

$$\det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A'\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)\det(A') = -\det(A') > 0$$

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

なので，$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} A' \in G_1$ であるから，$A' = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} A' \in \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} G_1$．よって，$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} G_1 \supset G'$．

以上より，$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} G_1 = G'$ であり，$GL_2(\mathbb{R})$ の G_1 による左剰余類への分割は

$$GL_2(\mathbb{R}) = G_1 \cup \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} G_1$$

となるので，

$$GL_2(\mathbb{R})/G_1 = \left\{G_1, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} G_1\right\}$$

であり，$(GL_2(\mathbb{R}) : G_1) = 2$．よって，$G_1$ は正規部分群である． □

(2) (c) 部分群とならない．

理由：部分群であるためには任意の G_2 の元に対して，その逆元 (=逆行列) も再び G_2 に入っている必要がある．しかし，例えば $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \in G_2$ に対し，その逆行列 $\begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ は $(1/2) \times 1 - 0 \times 0 = 1/2 < 1$ より，G_2 の元でない． □

(3) (b) 部分群となるが正規部分群ではない．

理由：G_3 は定義より明らかに空ではない．各 $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta' & -\sin\theta'\\ \sin\theta' & \cos\theta'\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' & -\cos\theta\sin\theta' - \sin\theta\cos\theta'\\ \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' & -\sin\theta\sin\theta' + \cos\theta\cos\theta'\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta')\\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta')\end{pmatrix} \in G_3\end{aligned}$$

である (2 つめの等式は三角関数の加法定理より従う)．また，各 $\theta \in \mathbb{R}$ に対し，$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$，$\cos\theta = \cos(-\theta)$，$\sin\theta = -\sin(-\theta)$ より，

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta)\\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{pmatrix} \in G_3$$

である．これらより，G_3 は $GL_2(\mathbb{R})$ の部分群である．

一方，例えば $\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix} \in G_3$ $(\theta = \pi/4)$ に対し，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix}\sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ 1/2\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となり，$(1,2)$ 成分と $(2,1)$ 成分が -1 倍の関係ではないため，特にこれは G_3 の元ではない．よって，G_3 は正規部分群とならない． □

問題 3 補足解説． (1) の正規性の別証明では，第 9 回講義資料の命題 8.3 に帰着させる方法を行った．正規部分群であるので剰余群 $GL_2(\mathbb{R})/G_1$ を考えてみると，集合としては

$$GL_2(\mathbb{R})/G_1 = \left\{G_1, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} G_1\right\}$$

であって，二項演算は，

$$G_1 \cdot G_1 = G_1 \qquad G_1 \cdot \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} G_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} G_1$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} G_1 \cdot G_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} G_1 \qquad \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} G_1 \cdot \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} G_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^2 G_1 = G_1$$

という形で入っていることがわかる．

部分集合 G_2 は行列の積 (二項演算) では閉じているので，逆元をとる操作で閉じていないことを指摘することになる．

部分群 G_3 は**回転群 (rotation group)**，あるいは**特殊直交群 (special orthogonal group)** と呼ばれ，$SO_2(\mathbb{R})$ と書かれる．ちなみに，2 以上の整数 n に対して，n 次の特殊直交群は

$$SO_n(\mathbb{R}) \coloneqq \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A^T A = I_n, \det A = 1\}$$

と定義される．ただし，A^T は A の転置，I_n は n 次単位行列である．($n = 2$ のときこの定義の $SO_2(\mathbb{R})$ と G_3 が一致していることを確かめよ．) これは正規部分群ではない $GL_n(\mathbb{R})$ の部分群である． $\square$