代数学 I 第 10 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

準同型 $\phi\colon \mathfrak{S}_4 \to GL_2(\mathbb{C})$ であって，

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}$$

を満たすものが存在する．(このことは証明しなくて良い．) このとき，以下の $GL_2(\mathbb{C})$ の元を具体的に求めよ．ただし，<u>答えのみではなく計算過程を残すこと．</u>

$$\text{(i) } \phi\left(\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\right) \qquad \text{(ii) } \phi\left(\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\right)$$

問題 1 解答例.

<u>(i)</u>

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}$$

であるので，準同型の性質から，

$$\begin{aligned}\phi\left(\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\right) &= \phi\left(\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}\right)\\ &= \phi\left(\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}\right)\phi\left(\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}\right)\\ &= \begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

□

<u>(ii)</u>

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}$$

であるので，準同型の性質から，

$$\begin{aligned}&\phi\left(\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\right)\\ &= \phi\left(\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}\right)\\ &= \phi\left(\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}\right)\phi\left(\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}\right)\phi\left(\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}\right)\phi\left(\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}\right)\\ &= \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

□

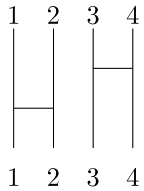
* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

問題 1 補足解説. それぞれの元を ϕ による送り先のわかっている

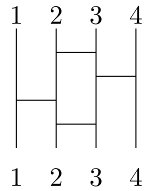
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 2 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

らの合成で表すことで計算を行うことができる．これらの元は順に隣接互換 $(1\ 2), (2\ 3), (3\ 4)$ なので，与えられた対称群の元をこれらの合成で書くためには対称群と "あみだくじ" の対応を思い出せば良い (第 5 回講義資料 P.3–4，第 5 回レポート課題)．問題 1 のそれぞれの元に対応するあみだくじは以下である：

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$:



$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$:



□

> **問題 2**
>
> 有理数全体のなす加法群 $(\mathbb{Q}, +)$ と正の有理数全体のなす乗法群 $(\mathbb{Q}_{>0}, \times)$ は同型ではないことを示せ.

問題 2 解答例. 背理法で証明する．同型 $\phi\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_{>0}$ が存在すると仮定する．ϕ は特に全射であることから，$\phi(a) = 2$ となる $a \in \mathbb{Q}$ が存在する．このとき，$a/2 \in \mathbb{Q}$ であり，さらに ϕ は準同型であることから，

$$2 = \phi(a) = \phi(a/2 + a/2) = \phi(a/2)^2$$

となる．いま，$\phi(a/2) \in \mathbb{Q}_{>0}$ であるが，正の有理数であって 2 乗すると 2 となるものは存在しないため，これは矛盾である．よって，$(\mathbb{Q}, +)$ と $(\mathbb{Q}_{>0}, \times)$ は同型でない. □

問題 2 補足解説.『$\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto e^x$ は同型だが，$\exp(1) = e \notin \mathbb{Q}_{>0}$ より，$\exp(\mathbb{Q}) \neq \mathbb{Q}_{>0}$ であるため』というような解答は不適である．1 つそれらしい候補を勝手に持ってきて，やっぱりそれではダメだということを述べても同型でないことの証明にはなっていない．「どう頑張っても同型が作れない」ということを示す必要があるのである. □