代数学 I 第 11 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

G を位数 12 の群とする．全射準同型 $\phi\colon G \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ が存在するとき，$\operatorname{Ker}\phi$ の位数を求めよ．ただし，答えのみではなく考察の過程も記述すること．

問題 1 解答例. 準同型定理より，$G/\ker\phi \simeq \operatorname{Im}\phi$ であるが，ϕ は全射なので，$\operatorname{Im}\phi = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$．よって，

$$|G/\ker\phi| = |\operatorname{Im}\phi| = |\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}| = 3.$$

これと Lagrange の定理より，

$$|\operatorname{Ker}\phi| = \frac{|G|}{|G/\ker\phi|} = \frac{12}{3} = 4.$$

□

問題 1 補足解説. 本問は準同型定理と Lagrange の定理を組み合わせる問題である．このような考え方はしばしば便利である．例えば，n を 2 以上の整数としたとき，n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の各元に対し，その符号を与える写像

$$\operatorname{sgn}\colon \mathfrak{S}_n \to \{1,-1\},\ \sigma \mapsto \operatorname{sgn}\sigma$$

は全射準同型であり，

$$\operatorname{Ker}\operatorname{sgn} \coloneqq \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \operatorname{sgn}\sigma = 1\} \eqqcolon \mathfrak{A}_n \ (n \text{ 次交代群})$$

となるのであった (第 10 回講義資料例 6)．これより，準同型定理から，

$$|\mathfrak{S}_n/\mathfrak{A}_n| = |\operatorname{Im}\operatorname{sgn}| = |\{1,-1\}| = 2$$

となり，Lagrange の定理より，

$$|\mathfrak{A}_n| = \frac{|\mathfrak{S}_n|}{|\mathfrak{S}_n/\mathfrak{A}_n|} = \frac{n!}{2}$$

となることがわかる．これは，$\mathfrak{S}_n$ において偶置換と奇置換がちょうど同じ数だけあるということを述べている．□

問題 2

$\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ は同型ではないことを示せ．

問題 2 解答例. $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ の任意の元 $([m_1]_3, [m_2]_6)$ は

$$\underbrace{([m_1]_3, [m_2]_6) + \cdots + ([m_1]_3, [m_2]_6)}_{6\text{ 個}} = ([6m_1]_3, [6m_2]_6) = ([0]_3, [0]_6)$$

を満たす．特に，$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ の元の位数は全て 6 以下である．一方，$\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ は位数 18 の元 $[1]_{18}$ を持つ．これより，$\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ は同型でない．□

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

問題 2 補足解説． 本問において，『写像 $\phi\colon \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, [m]_{18} \mapsto ([m]_3, [m]_6)$ が同型写像とならないことを示す』という方針は不適である．なぜなら，2 つの群が同型でないことを示すためには，「同型写像の候補の 1 つである ϕ が実際には同型とならない」ということだけでなく，「どう頑張っても同型写像が作れない」ということを示す必要があるためである．

本問の解答例と全く同様の方法で，一般に正の整数 n_1, n_2 が互いに素でないとき，

$$\mathbb{Z}/n_1n_2\mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}$$

となることを示すことができる．

証明． n_1 と n_2 の最小公倍数を ℓ とすると，$\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}$ の任意の元 $([m_1]_{n_1}, [m_2]_{n_2})$ は

$$\underbrace{([m_1]_{n_1}, [m_2]_{n_2}) + \cdots + ([m_1]_{n_1}, [m_2]_{n_2})}_{\ell\text{個}} = ([\ell m_1]_{n_1}, [\ell m_2]_{n_2}) = ([0]_{n_1}, [0]_{n_2})$$

を満たす．特に，$\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}$ の元の位数は全て ℓ 以下である．一方，$\mathbb{Z}/n_1n_2\mathbb{Z}$ は位数 n_1n_2 の元 $[1]_{n_1n_2}$ を持つ．今，n_1, n_2 は互いに素でないので，$\ell < n_1n_2$ となるため，$\mathbb{Z}/n_1n_2\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}$ は同型でない． □