代数学 I 第 12 回レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

3 次対称群 $\mathfrak{S}_3$ の共役類を全て記述せよ．答えのみで良い．

問題 1 解答例． $\{e\}, \{(1\ 2), (2\ 3), (3\ 1)\}, \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$．ただし，$e$ は $\mathfrak{S}_3$ の単位元．(もちろん 2 行配列の元の表示で解答しても良い．) □

問題 1 補足解説． 対称群の共役類を計算する際，第 6 回レポート課題解答の問題 1 補足解説で述べた以下の命題を頭に入れておくと計算がしやすい．

命題

n を 2 以上の整数とする．$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ と巡回置換 $(i_1\ i_2\ \cdots\ i_k)$ に対し，

$$\sigma(i_1\ i_2\ \cdots\ i_k)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\ \sigma(i_2)\ \cdots\ \sigma(i_k))$$

となる．

では $\mathfrak{S}_3$ の共役類を計算してみよう．最初に単位元 e の共役類を考えると，

$$K(e) = \{\sigma e \sigma^{-1} \mid \sigma \in \mathfrak{S}_3\} = \{e\}$$

(同じ計算で任意の群 G において $K(e) = \{e\}$ となる.) 次に ($K(e)$ に含まれない元であれば何でも良いが)，$(1\ 2) \in \mathfrak{S}_3$ の共役類を考えると，命題より，

$$\begin{aligned} K((1\ 2)) &= \{\sigma(1\ 2)\sigma^{-1} \mid \sigma \in \mathfrak{S}_3\} \\ &= \{(\sigma(1)\ \sigma(2)) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_3\} = \{(1\ 2), (2\ 3), (3\ 1)\}. \end{aligned}$$

なお，最後の等式においては，$(i\ j) = (j\ i)$ であったことに注意しよう．次に ($K(e)$，$K((1\ 2))$ のいずれにも含まれない元であれば何でも良いが)，$(1\ 2\ 3) \in \mathfrak{S}_3$ の共役類を考えると，命題より，

$$\begin{aligned} K((1\ 2\ 3)) &= \{\sigma(1\ 2\ 3)\sigma^{-1} \mid \sigma \in \mathfrak{S}_3\} \\ &= \{(\sigma(1)\ \sigma(2)\ \sigma(3)) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_3\} = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}. \end{aligned}$$

なお，最後の等式においては，$(i\ j\ k) = (j\ k\ i) = (k\ i\ j)$ であったことに注意しよう．

以上で $\mathfrak{S}_3$ の全ての元がいずれかの共役類の中に現れたので，$\mathfrak{S}_3$ の共役類への分割が $\mathfrak{S}_3 = K(e) \cup K((1\ 2)) \cup K((1\ 2\ 3))$ となることがわかる．よって，$\mathfrak{S}_3$ の共役類は $\{e\}, \{(1\ 2), (2\ 3), (3\ 1)\}, \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ で全てである．

ここで，一般の $\mathfrak{S}_n$ の場合を考えてみよう．第 6 回講義資料定理 5.4 (1) より，任意の $\mathfrak{S}_n$ の単位元でない元はどの 2 つも互いに素な巡回置換の合成として (順序の違いを除いて) 一意的に書かれるのであった．$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ がどの 2 つも互いに素な巡回置換の合成として，

$$\sigma = (i_{1,1}\ i_{1,2}\ \cdots\ i_{1,\ell_1})(i_{1,1}\ i_{2,2}\ \cdots\ i_{2,\ell_2}) \cdots (i_{t,1}\ i_{t,2}\ \cdots\ i_{t,\ell_t}),\ \ell_1 \geq \ell_2 \geq \cdots \geq \ell_t$$

と書かれるとき，この巡回置換の長さを並べた $(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_t)$ を σ の**サイクルタイプ**と呼ぶ．ここで，後の便利さのために，上の表示においては，σ で動かされない数字 k があった時にも (k) という自明な (=単位元に

* *e-mail*：`hoya@shibaura-it.ac.jp`

等しい) 巡回置換が合成されていると考えて，常に $\ell_1+\ell_2+\cdots+\ell_t=n$ となるようにすることにする．例えば，$\mathfrak{S}_3$ においては，

$$e=(1)(2)(3) \qquad (1\ 2)=(1\ 2)(3) \qquad (2\ 3)=(2\ 3)(1) \qquad (3\ 1)=(3\ 1)(2)$$

というようにする．こうすると，$\mathfrak{S}_3$ の元

$$e,(1\ 2),(2\ 3),(3\ 1),(1\ 2\ 3),(1\ 3\ 2)$$

のサイクルタイプはこの順に，

$$(1,1,1),(2,1),(2,1),(2,1),(3),(3)$$

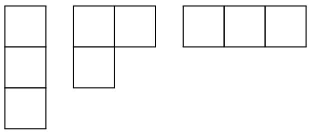
である．こう見ると，サイクルタイプごとにまとめたものが $\mathfrak{S}_3$ の共役類であることに気付けるだろう．実はこの考察は一般の $\mathfrak{S}_n$ で正しい！

上で述べた命題を考えれば，サイクルタイプが同じ 2 つの元は適切な $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ をとって，左から σ，右から σ^{-1} を掛けることで移りあえることがわかる．(考えてみよ．上に書いた $\mathfrak{S}_3$ の場合の計算が参考になると思われる．) 逆に左から σ，右から σ^{-1} を掛けるという操作は元のサイクルタイプを変えないこともわかる．これより，以下の定理がわかる：

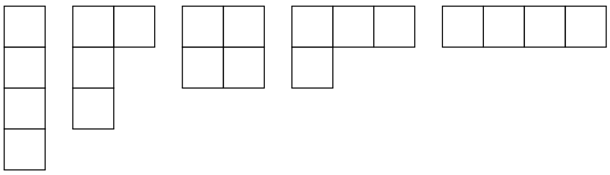
定理

n を 2 以上の整数とする．$\sigma\in\mathfrak{S}_n$ の共役類は σ と同じサイクルタイプを持つ $\mathfrak{S}_n$ の元を集めてきてできる集合である．特に，$\mathfrak{S}_n$ の共役類と『$\ell_1+\ell_2+\cdots+\ell_t=n$ かつ $\ell_1\geq\ell_2\geq\cdots\geq\ell_t$ を満たす正の整数の組 $(\ell_1,\ell_2,\cdots,\ell_t)$』は 1 対 1 に対応する．

$\ell_1+\ell_2+\cdots+\ell_t=n$ かつ $\ell_1\geq\ell_2\geq\cdots\geq\ell_t$ を満たす正の整数の組 $(\ell_1,\ell_2,\cdots,\ell_t)$ は n **の分割**と呼ばれる．n の分割 $(\ell_1,\ell_2,\cdots,\ell_t)$ は，同じ大きさの n 個の正方形 (箱) を各行の正方形の数が上から順に $\ell_1,\ell_2,\cdots,\ell_t$ となるように左上詰めに配置して得られる図を用いて表されることもある．このようにして得られる図を**ヤング図形 (Young diagram)** と呼ぶ．例えば，箱の数が 3 つのヤング図形は



の 3 つあり，順に 3 の分割 $(1,1,1),(2,1),(3)$ に対応する．定理を踏まえると，それぞれに対応して $\mathfrak{S}_3$ の共役類が作れて，$\mathfrak{S}_3$ の共役類は 3 つである．同様に考えると，箱の数が 4 つのヤング図形は

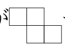
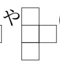


の 5 つあるので，$\mathfrak{S}_4$ の共役類は全部で 5 つである[*1]． □

問題 2

G を位数が素数 p の群，X を元の個数が p で割り切れない集合とする．X 上の G の作用 $G\times X\to X,(g,x)\mapsto g\cdot x$ が存在するとき，X において，G のいかなる元の作用でも動かない元 (つまり，$g\cdot x=x,\ \forall g\in G$ を満たす $x\in X$) が存在することを示せ．

問題 2 解答例． 軌道・固定群定理より，X における G-軌道の元の個数は $|G|=p$ の約数である．いま，p は素数なので，結局 X における G-軌道の元の個数は 1 または p である．ここで，X の軌道分解を考えたとき，す

[*1] テトリスのブロックのようだが  や  はヤング図形ではない．

べてが元の個数 p の軌道になったとすると X の元の個数が p で割り切れないことに矛盾するので，X の中には元の個数が 1 の G-軌道が少なくとも 1 つ存在することがわかる．その軌道を $\{x_0\} \subset X$ とすると，

$$G \cdot x_0 = \{g \cdot x_0 \mid g \in G\} = \{x_0\}$$

より，この x_0 は任意の $g \in G$ に対し，$g \cdot x_0 = x_0$ を満たす． □