代数学 I 第 10 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

群 G とその部分群 H があったとき，そこから商集合 G/H を考えることができた (第 8 回講義資料定義 7.6)．この G/H は (左) 剰余類からなる単なる集合であったが，実は H が "特別な性質を持つ部分群" であれば G/H に再び二項演算が定義でき，これを群と見ることができる．これが今回扱う対象である．ここでの "特別な性質を持つ部分群" が正規部分群と呼ばれるものであり，H が正規部分群のときに得られる群 G/H を剰余群と呼ぶ．この考え方を用いれば，例えば G より小さい H と G/H の群構造を調べることで G の群構造を調べるといったようなことができるようになる．

9.1 正規部分群

本節では G を群，$e \in G$ をその単位元とする．H を G の部分群としたとき，$g \in G$ の H による左剰余類 gH と右剰余類 Hg は一般には異なっていた．しかし，H の取り方によってはこれらが全て一致することがある．ここではそのような部分群に着目する．

定義 9.1

H を G の部分群とする．任意の $g \in G$ に対して，

$$gH = Hg$$

が成立するとき，H を G の**正規部分群 (normal subgroup)** という．

例 1. G を可換群，H をその部分群とすると，任意の $g \in G$ に対し，

$$gH = \{gh \mid h \in H\} = \{hg \mid h \in H\} = Hg$$

が成立するので，H は正規部分群である．つまり，可換群の任意の部分群は正規部分群である．

例 2. 3 次二面体群 $D_3 = \{e, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau\}$ を考える ($\sigma^3 = e, \tau^2 = e, \sigma^k\tau = \tau\sigma^{-k}$ $(k \in \mathbb{Z})$).

$$H \coloneqq \langle\tau\rangle = \{e, \tau\} \subset D_3$$

とすると，

$$\sigma H = \{\sigma, \sigma\tau\}, \qquad H\sigma = \{\sigma, \tau\sigma\} = \{\sigma, \sigma^{-1}\tau\} = \{\sigma, \sigma^2\tau\}$$

となるので $\sigma H \neq H\sigma$．よって，H は正規部分群<u>ではない</u>.

一方，

$$N \coloneqq \langle\sigma\rangle = \{e, \sigma, \sigma^2\}$$

とすると，

$$\tau N = \{\tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2\} = \{\tau, \sigma^{-1}\tau, \sigma^{-2}\tau\} = \{\tau, \sigma^2\tau, \sigma\tau\}, \qquad N\tau = \{\tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau\}$$

となるので，$\tau N = N\tau$ である．さらに，$D_3 = N \cup \tau N = N \cup N\tau$ なので，D_3 の元 g は

$$g \in N \quad 又は \quad g \in \tau N = N\tau$$

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

を満たし，

$$\begin{cases} g \in N \text{ のとき，} gN = N = Ng \\ g \in \tau N = N\tau \text{のとき，} gN = \tau N = N\tau = Ng \end{cases}$$

となる．よって，N は D_3 の正規部分群である．

N が D_3 の正規部分群であることは，以下の一般的な命題の帰結であるとも言える．(実際にはこの命題の証明は上の証明をそのまま一般化して書いたものである．)

命題 9.2

群 G における指数が 2 であるような G の部分群 N は正規部分群となる．

証明. $(G:N) = 2$ のとき，第 9 回講義資料命題 8.1 (1) より，G において N による左・右剰余類はそれぞれ 2 つずつ存在することになる．そのうち 1 つは $eN = N = Ne$ なので，$g_0 \notin N$ なる G の元をとると，G の左・右剰余類への分割は

$$G = N \cup g_0 N = N \cup N g_0$$

となる．ここで，$N \cap g_0 N = N \cap N g_0 = \emptyset$ であることに注意すると，

$$g_0 N = G \setminus N = N g_0$$

であることがわかる．($G \setminus N$ は商空間ではなく G における N の補集合の意味.) このとき，G の各元 g は

$$g \in N \quad \text{又は} \quad g \in g_0 N = N g_0$$

を満たし，

$$\begin{cases} g \in N \text{ のとき，} gN = N = Ng \\ g \in g_0 N = N g_0 \text{のとき，} gN = g_0 N = N g_0 = Ng \end{cases}$$

となる．よって，N は G の正規部分群である． □

例 3. n を 2 以上の整数とし，n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ と n 次交代群 $\mathfrak{A}_n$ を考える．このとき，ラグランジュの定理より，

$$(\mathfrak{S}_n : \mathfrak{A}_n) = \frac{|\mathfrak{S}_n|}{|\mathfrak{A}_n|} = \frac{n!}{n!/2} = 2.$$

よって，命題 9.2 より，$\mathfrak{A}_n$ は $\mathfrak{S}_n$ の正規部分群である．

以下の命題は与えられた部分群が正規部分群であるかどうかをチェックする際に便利である．

命題 9.3

H を G の部分群とする．このとき，以下の (1), (2), (3) は同値である．

(1) H は正規部分群である．

(2) 任意の $g \in G$ に対して，$gHg^{-1} = H$ が成立する．ただし，$gHg^{-1} := \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$.

(3) 任意の $g \in G$ と $h \in H$ に対して，$ghg^{-1} \in H$ である．

証明.

(1) ⇒ (2) 正規部分群の定義より，任意の $g \in G$ と $h \in H$ に対して，

$$gh \in gH = Hg$$

なので，$ghg^{-1} \in H$．よって，任意の $g \in G$ に対して，$gHg^{-1} \subset H$．ここで $g \in G$ は任意であるので，今の g を g^{-1} に取り替えても良く，任意の $g \in G$ に対して，$g^{-1}Hg \subset H$ も成立する．これより，任意の $g \in G, h \in H$ に対して，$g^{-1}hg \in H$ であるので，

$$h = g(g^{-1}hg)g^{-1} \in gHg^{-1}.$$

よって，任意の $g \in G$ に対して，$gHg^{-1} \supset H$ も言える．以上より，任意の $g \in G$ に対して，$gHg^{-1} = H$.

(2) $\Rightarrow$ (1) 任意の $g \in G$ と $h \in H$ に対し，$ghg^{-1} \in H$ なので，$gh \in Hg$．よって，任意の $g \in G$ に対し，

$$gH \subset Hg.$$

ここで (2) の条件において $g \in G$ は任意であるので，任意の $g \in G$ に対して $g^{-1}Hg = H$ も成立していることに注意すると，任意の $g \in G$ と $h \in H$ に対し，$g^{-1}hg \in H$ も成立し，$hg \in gH$ となる．よって，任意の $g \in G$ に対し，

$$gH \supset Hg$$

も成立する．以上より，任意の $g \in G$ に対して，$gH = Hg$ であることがわかる．

(2) $\Rightarrow$ (3) これは意味を考えれば自明である．

(3) $\Rightarrow$ (2) 条件 (3) は

$$\text{任意の } g \in G \text{ に対し，} gHg^{-1} \subset H$$

ということに他ならないので，この条件を仮定したとき

$$\text{任意の } g \in G \text{ に対し，} gHg^{-1} \supset H$$

も成立するということを示せばよい．しかしこれは，(1) $\Rightarrow$ (2) の証明内で証明した事実に他ならない． □

例 4 (クラインの 4 元群)**.** 4 次対称群 $\mathfrak{S}_4$ の部分集合

$$V \coloneqq \{e,\ (1\ 2)(3\ 4),\ (1\ 3)(2\ 4),\ (1\ 4)(2\ 3)\}$$

を考える．任意の $1, 2, 3, 4$ の並べ替え i, j, k, ℓ に対し，$(i\ j)(k\ \ell) \in V$ であることに注意する (互いに素な巡回置換の可換性より，$(1\ 2)(3\ 4) = (3\ 4)(1\ 2)$ 等が成立することに注意する)．このとき，V は $\mathfrak{S}_4$ の部分群である．実際，V の二項演算は以下のように定まっている．ただし，g 行 g' 列に gg' を書くというルールで表を書いている．このような表を群の**乗積表**と言う (第 5 回本レポート課題解答参照)．

	e	$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 3)(2\ 4)$	$(1\ 4)(2\ 3)$
e	e	$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 3)(2\ 4)$	$(1\ 4)(2\ 3)$
$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 2)(3\ 4)$	e	$(1\ 4)(2\ 3)$	$(1\ 3)(2\ 4)$
$(1\ 3)(2\ 4)$	$(1\ 3)(2\ 4)$	$(1\ 4)(2\ 3)$	e	$(1\ 2)(3\ 4)$
$(1\ 4)(2\ 3)$	$(1\ 4)(2\ 3)$	$(1\ 3)(2\ 4)$	$(1\ 2)(3\ 4)$	e

この表より，V は二項演算と逆元を取る操作で閉じていることがわかり，$\mathfrak{S}_4$ の部分群であると言える．さらに，これは可換群であることも表からわかる．この群を**クラインの 4 元群 (Klein four-group)** と言う．[*1]

V は $\mathfrak{S}_4$ の正規部分群である．これは，任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ と，任意の $1, 2, 3, 4$ の並べ替え i, j, k, ℓ に対し，

$$\sigma e \sigma^{-1} = \sigma\sigma^{-1} = e \in V,$$
$$\sigma(i\ j)(k\ \ell)\sigma^{-1} = (\sigma(i\ j)\sigma^{-1})(\sigma(k\ \ell)\sigma^{-1}) = (\sigma(i)\ \sigma(j))(\sigma(k)\ \sigma(\ell)) \in V$$

となることから，命題 9.3 よりわかる ((3) の条件を確かめた)[*2]．

さらに，V の単位元以外の元は互換 2 つの合成で表されていることより，第 6 回講義資料定理 5.4 からその符号は 1 であることがわかる．よって，$V \subset \mathfrak{A}_4$ であり，V は $\mathfrak{A}_4$ の正規部分群にもなっている．一般に，群 G とその部分群 H があり，さらに G の正規部分群 N が $N \subset H$ を満たしているとき，N は H の正規部分群でもある．このことは命題 9.3 より直ちにわかる ((2) または (3) の条件に言い換えるとわかりやすい)．

コラム：クラインの 4 元群 V とは何か?

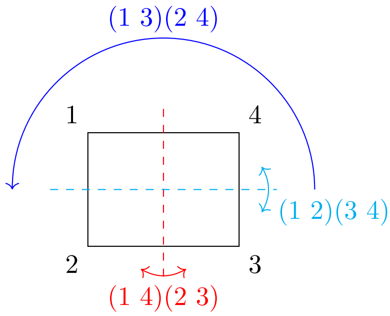
実はクラインの 4 元群 V は長方形の対称性を表す群である．長方形の対称変換は，

$$\text{恒等変換，対称軸に関する折り返しが 2 通り，} 180^\circ \text{ 回転}$$

[*1] この群は単位元以外の全ての元の位数が 2 なので巡回群ではない．これは巡回群でない位数最小の群となっている (位数 2 または 3 の群は第 9 回講義資料系 8.5 より必ず巡回群となる)．

[*2] 第 2 式の 2 つめのイコールは第 5 回本レポート課題問題 2 (1) で示した事実より従う．また，$\sigma(i), \sigma(j), \sigma(k), \sigma(\ell)$ が再び $1, 2, 3, 4$ の並べ替えになっていることにも注意する．

で与えられる (下図参照)．ここで，第 6 回講義資料の p.9 で考えたように，長方形の各頂点に 1,2,3,4 と番号を付けることで，上記の対称変換に $\mathfrak{S}_4$ の元を以下のように対応させることができる (どの位置の頂点がどの位置の頂点に行くかを記録する)．



これを見ると，それぞれの対称変換が確かに V の各元に対応していることがわかる．ちなみに，このように考えれば V は D_4 の (正規) 部分群であることも類推できるだろう (正方形は長方形の特別な場合である)．実際第 6 回講義資料 5.2 節の D_4 の記号を用いると，

$$\sigma^2 = (1\ 3)(2\ 4) \quad \sigma\tau = (1\ 2)(3\ 4) \quad \sigma^3\tau = (1\ 4)(2\ 3)$$

より，$V = \{e, \sigma^2, \sigma\tau, \sigma^3\tau\}$ である．

例 5. n を正の整数とし，$\mathbb{K}$ を $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．一般線型群

$$GL_n(\mathbb{K}) := \{A \mid A \text{ は } \mathbb{K} \text{ の元を成分とする } n \times n \text{ 行列で，} \det A \neq 0\}$$

を考える (第 1,2 回講義資料例 5 参照．二項演算は行列の積であった．) このとき，特殊線形群

$$SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in GL_n(\mathbb{K}) | \det A = 1\}$$

は $GL_n(\mathbb{K})$ の正規部分群である．部分群であることの確認は第 1,2 回講義資料例 5 で既に行っているので，ここでは正規部分群であることを確認しよう．命題 9.3 の (1) と (3) の同値性より，

$$\text{任意の } A \in GL_n(\mathbb{K}) \text{ と } X \in SL_n(\mathbb{K}) \text{ に対して，} AXA^{-1} \in SL_n(\mathbb{K})$$

となることを示せばよい．行列式が $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ に対して，

$$\det(AB) = \det(A)\det(B), \qquad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

という性質を満たしたことを思い出すと，

$$\begin{aligned} \det(AXA^{-1}) &= \det(A)\det(X)\det(A^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) \quad (X \in SL_n(\mathbb{K}) \text{ なので}) \\ &= \det(A) \cdot \frac{1}{\det(A)} = 1 \end{aligned}$$

となる．よって，$AXA^{-1} \in SL_n(\mathbb{K})$ であることがわかり，$SL_n(\mathbb{K})$ は確かに $GL_n(\mathbb{K})$ の正規部分群となる．

例 6. $\mathbb{K}$ を $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．2 次一般線型群

$$GL_2(\mathbb{K}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

を考える．このとき，

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| a, b, d \in \mathbb{C}, ad \neq 0 \right\}$$

は部分群であるが正規部分群<u>ではない</u>．これは以下のように確かめられる．

まず部分群であることを確かめよう．$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in B$ より，B は空ではない．任意の $g, h \in B$ に対し，$g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$，$h = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}$ とすると，

$$gh = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab' + bd' \\ 0 & dd' \end{pmatrix}$$

であり，$(aa')(dd') = (ad)(a'd') \neq 0$ なので，$gh \in B$．さらに，

$$g^{-1} = \frac{1}{ad}\begin{pmatrix} d & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

より，$g^{-1} \in B$．以上より，B は $GL_2(\mathbb{K})$ の部分群である．

一方，例えば $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{K})$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in B$ に対し，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \notin B$$

となる．よって，B は命題 9.3 (3) の条件を満たさず，$GL_2(\mathbb{K})$ の正規部分群とはならない．

例 7. G を群としたとき，その中心

$$Z(G) \coloneqq \{z \in G \mid zg = gz, \forall g \in G\}$$

は G の正規部分群である (中心については第 7 回講義資料 6.4 節を参照のこと)．中心が部分群であることは第 7 回講義資料命題 6.12 で示してあるので，ここでは正規性を確かめる．

任意の $g \in G$ と $z \in Z(G)$ に対して，

$$gzg^{-1} = zgg^{-1} = ze = z \in Z(G).$$

よって，命題 9.3 (3) が満たされるので，$Z(G)$ は G の正規部分群である．

9.2 剰余群

本節では G を群，$e \in G$ をその単位元とする．G の部分群 N が正規部分群だと何が良いかということに答えよう．実はこのとき，商集合 G/N に再び群構造が入るのである！定理の形で述べる．

定理 9.4

G を群，N を G の<u>正規</u>部分群とすると，二項演算

$$\cdot : G/N \times G/N \to G/N, (gN, hN) \mapsto gN \cdot hN \coloneqq ghN$$

が well-defined であり，これによって G/N が再び群となる．

定義 9.5

定理 9.4 の方法で作られる群 G/N を G の N による**剰余群 (quotient group)** という．

定理 9.4 の証明. まず，二項演算の well-defined 性をチェックする．このためには，

$$gN = g'N,\ hN = h'N \text{ としたとき，} ghN = g'h'N$$

となることを示せばよい．$gN = g'N,\ hN = h'N$ のとき，ある $n_1, n_2 \in N$ が存在して，

$$g = g'n_1,\ h = h'n_2$$

となる (第 8 回講義資料定義 7.6 参照)．このとき，

$$gh = g'n_1h'n_2 = g'h'(h')^{-1}n_1h'n_2 \tag{9.1}$$

となるが，いま N は正規部分群なので，命題 9.3 から $(h')^{-1}n_1h' \in N$ である (命題 9.3 (3) の条件)．これと N が二項演算で閉じていることより，

$$(h')^{-1}n_1h'n_2 \in N.$$

これより，(9.1) から gh と $g'h'$ は N に関して左合同であることがわかる (第 8 回講義資料定義 7.4 参照)．よって，$ghN = g'h'N$.

次に，この二項演算が群の二項演算の 3 性質を満たしていることを確かめる．

(I) (結合法則) 任意の $gN, hN, kN \in G/N$ に対し，

$$(gN \cdot hN) \cdot kN = ghN \cdot kN = (gh)kN = g(hk)N = gN \cdot hkN = gN \cdot (hN \cdot kN)$$

(群 G の二項演算が結合法則を満たしていることを用いた．)

(II) (単位元の存在) 単位元は $eN = N \in G/N$ である．実際，任意の $gN \in G/N$ に対し，

$$eN \cdot gN = egN = gN = geN = gN \cdot eN$$

が成立する．

(III) (逆元の存在) 各 $gN \in G/N$ に対し，$g^{-1}N$ を考えると，これは

$$gN \cdot g^{-1}N = gg^{-1}N = eN = g^{-1}gN = g^{-1}N \cdot gN$$

を満たしている．よって，$(gN)^{-1} = g^{-1}N$ である．

以上より，示すべきことは示された． □

例 8. n を正の整数とする．加法群 $\mathbb{Z}$ と n の倍数全体からなる部分群

$$n\mathbb{Z} \coloneqq \langle n \rangle = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

を考える．$\mathbb{Z}$ は可換群なので，その部分群 $n\mathbb{Z}$ は正規部分群である．これにより，定理 9.4 から剰余群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が構成できる．これは集合としては，

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{a + n\mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}\} = \{0 + n\mathbb{Z}, 1 + n\mathbb{Z}, 2 + n\mathbb{Z}, \dots, (n-1) + n\mathbb{Z}\}$$

であったことを思い出そう (第 8 回講義資料例 8)．このとき，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の二項演算は定理 9.4 から，

$$(a + n\mathbb{Z}) + (b + n\mathbb{Z}) = a + b + n\mathbb{Z}$$

で定義される．剰余類 $a + n\mathbb{Z}$ を $[a]_n$ と書くと，これは今まで学んできた群 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ に他ならない！ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ という記号を使っていたのはこの考え方によるものだったのである．

なお，$n\mathbb{Z}$ は加法群 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ らの部分群でもあるので，剰余群 $(\mathbb{Q}/n\mathbb{Z}, +), (\mathbb{R}/n\mathbb{Z}, +), (\mathbb{C}/n\mathbb{Z}, +)$ も同様に定義することができる[*3]．

例 9. 例 2 の状況を考えよう．3 次二面体群 $D_3 = \{e, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau\}$ とその正規部分群 $N \coloneqq \langle \sigma \rangle = \{e, \sigma, \sigma^2\}$ に対し，$D_3 = N \cup \tau N$ であったので，

$$D_3/N = \{gN \mid g \in G_3\} = \{N, \tau N\}$$

[*3] 第 3 回講義資料 p.2 の well-defined 性のところで，$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ は $(\mathbb{Q}/n\mathbb{Z}, +)$ に拡張できるという話題があったことも合わせて思い出そう．

となる．このとき，剰余群 D_3/N の乗積表は定理 9.4 から，

	N	τN
N	N	τN
τN	τN	$\tau^2 N = N$

となる．

例 10. 例 3 の状況を考えよう．n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ と n 次交代群 $\mathfrak{A}_n$ を考えると，$\mathfrak{A}_n$ は $\mathfrak{S}_n$ の正規部分群であった．$(\mathfrak{S}_n : \mathfrak{A}_n) = 2$ と $(1\ 2) \notin \mathfrak{A}_n$ より，

$$\mathfrak{S}_n = \mathfrak{A}_n \cup (1\ 2)\mathfrak{A}_n$$

である．これより，

$$\mathfrak{S}_n/\mathfrak{A}_n = \{\sigma\mathfrak{A}_n \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\} = \{\mathfrak{A}_n, (1\ 2)\mathfrak{A}_n\}$$

となる．このとき，剰余群 $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{A}_n$ の乗積表は定理 9.4 から，

	$\mathfrak{A}_n$	$(1\ 2)\mathfrak{A}_n$
$\mathfrak{A}_n$	$\mathfrak{A}_n$	$(1\ 2)\mathfrak{A}_n$
$(1\ 2)\mathfrak{A}_n$	$(1\ 2)\mathfrak{A}_n$	$(1\ 2)^2\mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}_n$

となる．なお，この乗積表は例 9 にある D_3/N のものと見た目がほぼ同じであるということに気付かれるだろう．実際 $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{A}_n$ と D_3/N は群としては**同型である**と言われる．この概念については次回解説を行う．

例 11. 例 4 の状況を考えよう．4 次対称群 $\mathfrak{S}_4$ とクラインの 4 元群 V を考えると，V は $\mathfrak{S}_4$ の正規部分群であった．ここで，$\mathfrak{S}_4$ を V による剰余類 (正規なので左右の区別はない) で分解すると，

$$\mathfrak{S}_4 = V \cup (1\ 2)V \cup (2\ 3)V \cup (1\ 3)V \cup (1\ 2\ 3)V \cup (1\ 3\ 2)V$$

となるので，

$$\mathfrak{S}_4/V = \{\sigma V \mid \sigma \in \mathfrak{S}_4\} = \{V, (1\ 2)V, (2\ 3)V, (1\ 3)V, (1\ 2\ 3)V, (1\ 3\ 2)V\}$$

となる．この分解の計算は演習問題として残しておくので，是非力試しで自分で計算してみてほしい[*4]．このとき，剰余群 $\mathfrak{S}_4/V$ の二項演算は定理 9.4 から，$\{e, (1\ 2), (2\ 3), (1\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ の間に成り立つ計算公式と同じになることがわかる．例えば，

$$(1\ 2)V \cdot (2\ 3)V = (1\ 2)(2\ 3)V = (1\ 2\ 3)V$$

等となる．これより，次回学ぶ言葉を用いれば，$\mathfrak{S}_4/V$ は $\mathfrak{S}_3$ と**同型である**ということになる．

例 12. n を正の整数とし，$\mathbb{K}$ を $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．一般線型群 $GL_n(\mathbb{K})$ を考える．このとき，$GL_n(\mathbb{K})$ の中心は

$$Z(GL_n(\mathbb{K})) = \{aI_n \mid a \in \mathbb{K}^\times\}$$

となるのであった (第 7 回講義資料例 7．I_n は n 次単位行列)．例 7 より，$Z(GL_n(\mathbb{K}))$ は $GL_n(\mathbb{K})$ の正規部分群である．$GL_n(\mathbb{K})$ の $Z(GL_n(\mathbb{K}))$ による剰余群

$$PGL_n(\mathbb{K}) \coloneqq GL_n(\mathbb{K})/Z(GL_n(\mathbb{K}))$$

は**射影一般線型群 (projective general linear group)** と呼ばれる．

[*4] 地道に計算しても良いし，第 8 回本レポート課題解答問題 4 補足解説の「ラグランジュの定理を用いた別解」をまねれば上手い計算も可能である．