# 代数学 I 第 11 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

2 つの群 $G_1, G_2$ が与えられたとき，それらは一見見た目が違っても“群としては同じ”であるということがある．簡単な例として，加法群 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ と乗法群 $(\{1, -1\}, \times)$ を考えてみよう．これらの乗積表はそれぞれ以下のようになる (乗積表については第 10 回講義資料例 4 を参照のこと)．

| $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ | $[0]_2$ | $[1]_2$ |
|---|---|---|
| $[0]_2$ | $[0]_2$ | $[1]_2$ |
| $[1]_2$ | $[1]_2$ | $[0]_2$ |

| $\{1, -1\}$ | $1$ | $-1$ |
|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $-1$ |
| $-1$ | $-1$ | $1$ |

これらは，$[0]_2$ を $1$ に (=単位元を単位元に)，$[1]_2$ を $-1$ に対応させれば全く同じ表になることがわかる．乗積表は群の二項演算の情報を全て持っているので，このとき $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ と $(\{1, -1\}, \times)$ は見かけは違うが，**群としての構造は全く同じ**であると言える．今回はこのような状況を**同型**という概念を導入することで定式化する．

## 10.1 群準同型・群同型

まず“群構造と相性の良い写像”である**準同型**を定義する．

**定義 10.1**

$G, G'$ を群とする．写像 $\phi\colon G \to G'$ が

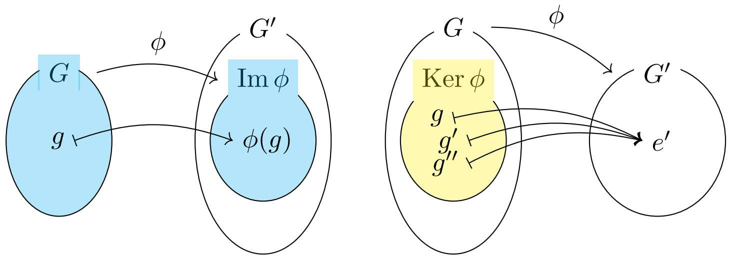
$$\text{任意の } g_1, g_2 \in G \text{ に対して}, \phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2)$$

を満たすとき，$\phi$ を**準同型 (homomorphism)** あるいは**群準同型 (group homomorphism)** という．さらに写像として $\phi$ が全射であるとき $\phi$ を**全射準同型**，単射であるとき**単射準同型**，全単射であるとき**全単射準同型**という，

準同型 $\phi\colon G \to G'$ に対し，

$$\operatorname{Im}\phi := \{g' \in G' \mid \text{ある } g \in G \text{ が存在して}, \phi(g) = g'\}$$
$$\operatorname{Ker}\phi := \{g \in G \mid \phi(g) = e'\} \ (\text{ただし，} e' \text{は } G' \text{の単位元})$$

とし，$\operatorname{Im}\phi$ を $\phi$ の**像 (image)**，$\operatorname{Ker}\phi$ を $\phi$ の**核 (kernel)** という．ここで $\operatorname{Im}\phi$ は $G'$ の部分集合であり，$\operatorname{Ker}\phi$ は $G$ の部分集合であることに注意すること．




* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

**例 1.** 3 次二面体群 $D_3$ から，4 を法とする整数の剰余類群 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ への写像

$$
\begin{array}{cccc}
\phi\colon & D_3 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \\
& \Psi & & \Psi \\
& e & \longmapsto & [0]_4 \\
& \sigma & \longmapsto & [0]_4 \\
& \sigma^2 & \longmapsto & [0]_4 \\
& \tau & \longmapsto & [2]_4 \\
& \sigma\tau & \longmapsto & [2]_4 \\
& \sigma^2\tau & \longmapsto & [2]_4
\end{array}
$$

は群準同型である．例えば，

$$
\begin{aligned}
&\phi(\tau\sigma) = \phi(\sigma^{-1}\tau) = \phi(\sigma^2\tau) = [2]_4 = [2]_4 + [0]_4 = \phi(\tau) + \phi(\sigma) \\
&\phi(\sigma^2) = [0]_4 = [0]_4 + [0]_4 = \phi(\sigma) + \phi(\sigma)
\end{aligned}
$$

等は確かに成立している ($\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ における二項演算は $+$ であったことに注意)．$\phi$ が群準同型であることを厳密に言うためにはもちろんこのように一例を見るだけでは不十分で，任意の $g_1, g_2 \in D_3$ に対して，

$$\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1) + \phi(g_2)$$

であることを示す必要がある．全ての二項演算を考えるのであれば乗積表を書くと状況がわかりやすい．$D_3$ の乗積表は以下の通りである．

| $D_3$ | $e$ | $\sigma$ | $\sigma^2$ | $\tau$ | $\sigma\tau$ | $\sigma^2\tau$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $\sigma$ | $\sigma^2$ | $\tau$ | $\sigma\tau$ | $\sigma^2\tau$ |
| $\sigma$ | $\sigma$ | $\sigma^3$ | $e$ | $\sigma\tau$ | $\sigma^2\tau$ | $\tau$ |
| $\sigma^2$ | $\sigma^2$ | $e$ | $\sigma$ | $\sigma^2\tau$ | $\tau$ | $\sigma\tau$ |
| $\tau$ | $\tau$ | $\sigma^2\tau$ | $\sigma\tau$ | $e$ | $\sigma^2$ | $\sigma$ |
| $\sigma\tau$ | $\sigma\tau$ | $\tau$ | $\sigma^2\tau$ | $\sigma$ | $e$ | $\sigma^2$ |
| $\sigma^2\tau$ | $\sigma^2\tau$ | $\sigma\tau$ | $\tau$ | $\sigma^2$ | $\sigma$ | $e$ |

乗積表は $g$ 行 $g'$ 列に $gg'$ を書くというルールであったので，この表に書かれた元を全て $\phi$ で送ると，$\phi(g)$ 行 $\phi(g')$ 列には $\phi(gg')$ が書かれることになる．一方，$\phi$ が群準同型であるためには任意の $g, g' \in D_3$ に対し，

$$\phi(gg') = \phi(g) + \phi(g')$$

であれば良かったので，結局

> 乗積表に書かれた元を全て $\phi$ で送ったとき，$\phi(g)$ 行 $\phi(g')$ 列に $\phi(g) + \phi(g')$ が書かれる表になっていれば $\phi$ は準同型である

ということがわかる．試して見ると，

| | $[0]_4$ | $[0]_4$ | $[0]_4$ | $[2]_4$ | $[2]_4$ | $[2]_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $[0]_4$ | $[0]_4$ | $[0]_4$ | $[0]_4$ | $[2]_4$ | $[2]_4$ | $[2]_4$ |
| $[0]_4$ | $[0]_4$ | $[0]_4$ | $[0]_4$ | $[2]_4$ | $[2]_4$ | $[2]_4$ |
| $[0]_4$ | $[0]_4$ | $[0]_4$ | $[0]_4$ | $[2]_4$ | $[2]_4$ | $[2]_4$ |
| $[2]_4$ | $[2]_4$ | $[2]_4$ | $[2]_4$ | $[0]_4$ | $[0]_4$ | $[0]_4$ |
| $[2]_4$ | $[2]_4$ | $[2]_4$ | $[2]_4$ | $[0]_4$ | $[0]_4$ | $[0]_4$ |
| $[2]_4$ | $[2]_4$ | $[2]_4$ | $[2]_4$ | $[0]_4$ | $[0]_4$ | $[0]_4$ |

となり，確かに $\phi(g)$ 行 $\phi(g')$ 列には $\phi(g) + \phi(g')$ が書かれていることがわかる．これより，$\phi$ が群準同型であることが厳密に確かめられた．

この例からわかるように，群準同型 $\phi\colon G_1 \to G_2$ は，$G_1$ の乗積表を $G_2$ の二項演算のルールを与える表に変換するような写像であると考えることができる．ただし，

- 変換後の表の中には同じラベルが付いた行・列がいくつもあることがある ($\Leftrightarrow$ $\phi$ は単射ではないかもしれない)

- 変換後の表の中には現れない $G_2$ の元もあるかもしれない ($\Leftrightarrow$ $\phi$ は全射ではないかもしれない)

というのが準同型である．変換後の表の行・列に $G_2$ の全ての元がちょうど一回ずつ出るようなとき，$G_1$ の乗積表は $G_2$ の乗積表にぴったり変換されたと言うことができるが，これは $\phi$ が全単射準同型であるということに他ならない．実際以下で全単射準同型を**同型**と定義する．

なお，上の例で像と核も見ておくと，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Im}\,\phi = \{g' \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \mid \text{ある } g \in D_3 \text{が存在して}, \phi(g) = g'\} = \{[0]_4, [2]_4\} \\
&\mathrm{Ker}\,\phi = \{g \in D_3 \mid \phi(g) = [0]_4\} = \{e, \sigma, \sigma^2\}
\end{aligned}
$$

である．

以下に準同型に関する様々な基本命題を述べる．もう少し例を見て準同型に慣れたいという方は先に 10.2 節に飛んで例を見てもらっても良い (ただし例を見た後はこちらに戻ってくること)．

**命題 10.2**

$\phi\colon G \to G'$ を準同型とし，$e$ を $G$ の単位元，$e'$ を $G'$ の単位元とする．このとき，以下が成立する．

(1) $\phi(e) = e'$．つまり，準同型は単位元を必ず単位元に送る．

(2) 任意の $g \in G$ に対して，$\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$．

**証明.**

(1) 単位元と準同型の性質より，

$$\phi(e) = \phi(ee) = \phi(e)\phi(e)$$

が成立する．これより，$\phi(e)^{-1}$ を両辺に掛けると，$e' = \phi(e)$ がわかる．

(2) $\phi(g^{-1})$ が $\phi(g)$ の逆元の定義の性質を満たしていることを確かめる．

$$
\begin{aligned}
\phi(g^{-1})\phi(g) &= \phi(g^{-1}g) \quad (\text{準同型の性質より}) \\
&= \phi(e) = e' \quad ((1)\text{ より}) \\
\phi(g)\phi(g^{-1}) &= \phi(gg^{-1}) \quad (\text{準同型の性質より}) \\
&= \phi(e) = e' \quad ((1)\text{ より})
\end{aligned}
$$

となるので，確かに $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$ である． □

**命題 10.3**

$\phi\colon G \to G'$ を準同型とする．このとき，以下が成立する．

(1) $\mathrm{Im}\,\phi$ は $G'$ の部分群.

(2) $\mathrm{Ker}\,\phi$ は $G$ の正規部分群.

**証明.**

(1) 定義より $\mathrm{Im}\,\phi$ の元は $\phi(g)$ ($g \in G$) の形で書けるものであったので，$\mathrm{Im}\,\phi$ は明らかに空ではない．次に，任意の $\phi(g_1), \phi(g_2) \in \mathrm{Im}\,\phi$ に対し，準同型の性質から，

$$\phi(g_1)\phi(g_2) = \phi(g_1 g_2) \in \mathrm{Im}\,\phi.$$

また，任意の $\phi(g) \in \mathrm{Im}\,\phi$ に対し，命題 10.2 (2) から，

$$\phi(g)^{-1} = \phi(g^{-1}) \in \mathrm{Im}\,\phi.$$

よって，$\mathrm{Im}\,\phi$ は二項演算と逆元を取る操作について閉じているので，$G'$ の部分群である．

(2) $G$ の単位元を $e$，$G'$ の単位元を $e'$ とする．命題 10.2 (1) より，$\phi(e)=e'$ なので，$e\in\operatorname{Ker}\phi$ となり，特に $\operatorname{Ker}\phi$ は空ではない．次に，任意の $g_1,g_2\in\operatorname{Ker}\phi$ に対し，準同型の性質から，

$$\phi(g_1g_2)=\phi(g_1)\phi(g_2)=e'e'=e'$$

より，$g_1g_2\in\operatorname{Ker}\phi$．また，任意の $g\in\operatorname{Ker}\phi$ に対し，命題 10.2 (2) から，

$$\phi(g^{-1})=\phi(g)^{-1}=(e')^{-1}=e'$$

より，$g^{-1}\in\operatorname{Ker}\phi$．よって，$\operatorname{Ker}\phi$ は二項演算と逆元を取る操作について閉じているので，$G$ の部分群である．

次に正規性を確かめる．任意の $g\in G, k\in\operatorname{Ker}\phi$ に対し，

$$\phi(gkg^{-1})=\phi(g)\phi(k)\phi(g^{-1})=\phi(g)e'\phi(g^{-1})=\phi(g)\phi(g^{-1})=\phi(gg^{-1})=\phi(e)=e'$$

となるので，$gkg^{-1}\in\operatorname{Ker}\phi$．よって，第 10 回講義資料命題 9.3 より，$\operatorname{Ker}\phi$ は正規部分群． □

**命題 10.4**

$\phi\colon G\to G'$ を準同型とする．$e$ を $G$ の単位元とする．このとき，以下が成立する．

(1) $\operatorname{Im}\phi=G'\Leftrightarrow\phi$ は全射．

(2) $\operatorname{Ker}\phi=\{e\}\Leftrightarrow\phi$ は単射．

**証明.**

(1) これは全射の定義そのものである．

(2) の $\Rightarrow$ 方向 この証明中では $G'$ の単位元を $e'$ と書くことにする．$g_1,g_2\in G$ で $g_1\neq g_2$ のとき，$g_1g_2^{-1}\neq e$ である．いま，$\operatorname{Ker}\phi=\{e\}$ なので，$\phi$ で $e'$ に送られる元は $e$ だけであることから，

$$e'\neq\phi(g_1g_2^{-1})=\phi(g_1)\phi(g_2)^{-1}$$

(最後の等式では命題 10.2 (2) も用いた)．これより，$\phi(g_1)\neq\phi(g_2)$ であることがわかる．

(2) の $\Leftarrow$ 方向 $\phi$ が単射であることより，任意の $e\neq g\in G$ に対して，

$$e'=\phi(e)\neq\phi(g).$$

なお，最初の等式では命題 10.2 (1) を用いた．よって，$g\notin\operatorname{Ker}\phi$ であるから，結局 $\operatorname{Ker}\phi$ の元は $e$ のみ，つまり $\operatorname{Ker}\phi=\{e\}$ であることがわかる． □

**命題 10.5**

$\phi\colon G\to G'$ を準同型とする．このとき，以下が成立する．

(1) $\phi'\colon G'\to G''$ も準同型のとき，$\phi'\circ\phi\colon G\to G''$ も準同型である．

(2) $\phi$ が全単射のとき，逆写像 $\phi^{-1}\colon G'\to G$ も準同型．

**証明.**

(1) 任意の $g_1,g_2\in G$ に対して，

$$(\phi'\circ\phi)(g_1g_2)=\phi'(\phi(g_1g_2))=\phi'(\phi(g_1)\phi(g_2))=\phi'(\phi(g_1))\phi'(\phi(g_2))=(\phi'\circ\phi)(g_1)(\phi'\circ\phi)(g_2)$$

となるので，$\phi'\circ\phi$ は準同型である．

(2) 任意の $g_1',g_2'\in G'$ に対して，

$$\phi(\phi^{-1}(g_1'g_2'))=g_1'g_2'=\phi(\phi^{-1}(g_1'))\phi(\phi^{-1}(g_2'))=\phi(\phi^{-1}(g_1')\phi^{-1}(g_2')).$$

ここで，$\phi$ は単射であることより，このとき

$$\phi^{-1}(g_1'g_2')=\phi^{-1}(g_1')\phi^{-1}(g_2')$$

が言える．これは $\phi^{-1}$ が準同型であるということに他ならない． □

**定義 10.6**

$\phi\colon G \to G'$ が全単射準同型であるとき，$\phi$ を**同型 (isomorphism)** あるいは**群同型 (group isomorphism)** という．同型 $\phi\colon G \to G'$ が存在するとき，$G$ と $G'$ は**同型である (isomorphic)** であるといい，$G \simeq G'$ と書く．

例 1 で考察したように，$\phi\colon G \to G'$ が同型であるということは，$\phi$ が $G$ の乗積表を $G'$ の乗積表に変換するということと同値である．これより，$G \simeq G'$ のとき，$G$ と $G'$ は群としては全く同じものとしてみなすことができる．

**命題 10.7**

同型 $\simeq$ は同値関係である．

**証明.** $\simeq$ が反射律，対称律，推移律を満たすことを示せばよい．
(i) (反射律) 群 $G$ に対し，恒等写像 $\mathrm{id}_G\colon G \to G$ は明らかに同型なので，$G \simeq G$ である．
(ii) (対称律) $G \simeq G'$ とすると，定義よりある全単射準同型 $\phi\colon G \to G'$ が存在する．このとき，命題 10.5 (2) より $\phi^{-1}\colon G' \to G$ も全単射準同型である (全単射写像の逆写像は全単射であることに注意)．よって，$G' \simeq G$ である．
(iii) (推移律) $G \simeq G', G' \simeq G''$ とすると，定義より全単射準同型 $\phi\colon G \to G', \phi'\colon G' \to G''$ が存在する．このとき，命題 10.5 (1) より $\phi' \circ \phi\colon G \to G''$ も全単射準同型である (全単射写像の合成は再び全単射であることに注意)．よって，$G \simeq G''$ である．

以上より示すべきことは全て示された． □

## 10.2 群準同型・群同型の例

本節では，準同型・同型の様々な例を見ていく．

**例 2.** 講義資料の冒頭に述べた対応

$$\phi\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \{1, -1\}, [0]_2 \mapsto 1, [1]_2 \mapsto -1$$

は同型である．実際このように対応させると，これは全単射で，任意の $[a]_2, [b]_2 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に対して，

$$\phi([a]_2 + [b]_2) = \phi([a]_2) \times \phi([b]_2)$$

が成り立つことが冒頭の乗積表の比較からわかる．

**例 3.** 乗法群 $\mathbb{C}^\times$ から $\mathbb{R}^\times$ への絶対値を取る写像

$$|\cdot|\colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{R}^\times,\ z = x + iy \mapsto |z| := \sqrt{x^2 + y^2}\ (x, y \in \mathbb{R})$$

は準同型である．実際，絶対値の性質として，任意の $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^\times$ に対し，

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

が成り立つのであった．これは準同型の定義条件に他ならない．このとき

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,|\cdot| &= \{r \in \mathbb{R}^\times \mid \text{ある } z \in \mathbb{C}^\times \text{が存在して，} |z| = r\} = \mathbb{R}_{>0} \\
\mathrm{Ker}\,|\cdot| &= \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1\} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

であり，$|\cdot|$ は全射でも単射でもない．

**例 4.** 加法群 $\mathbb{C}$ から $\mathbb{R}$ への絶対値を取る写像

$$|\cdot|\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ z \mapsto |z|$$

は準同型<u>ではない</u>．実際，いま加法群を考えているので考える演算は和 $+$ であるが，

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$$

は一般には成立しない (例えば，$|1 + (-1)| = 0 \neq |1| + |-1|$)．

**例 5.** 指数・対数写像

$$\begin{aligned} &\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0},\ x \mapsto e^x \\ &\log\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \log(x) \end{aligned}$$

はどちらも準同型である．実際，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\exp(x + y) = e^{x+y} = e^x e^y = \exp(x)\exp(y) \quad (\text{指数法則})$$

が成り立ち，任意の $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し，

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$$

が成り立つことは良く知っていると思われるが，これらは今の見方では準同型の定義条件に他ならない．また，このとき

$$\log \circ \exp = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \qquad \exp \circ \log = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{>0}}$$

が成立するので，定義 10.6 より，$\exp, \log$ はいずれも同型である．特に $\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}_{>0}$ である．加法群 $\mathbb{R}$ と乗法群 $\mathbb{R}_{>0}$ は見かけは違うが，実は群としては同じものだったのである！*1

**例 6.** $n$ を正の整数とし，$\mathbb{K}$ を $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．一般線型群

$$GL_n(\mathbb{K}) \coloneqq \{A \mid A \text{ は } \mathbb{K} \text{ の元を成分とする } n \times n \text{ 行列で}, \det A \neq 0\}$$

を考える．このとき，行列式を取る写像

$$\det\colon GL_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^\times,\ A \mapsto \det(A)$$

は準同型である．実際，任意の $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ に対して，

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

という性質が成り立つのであったが，これは準同型の定義条件に他ならない．このとき

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im}\det = \{r \in \mathbb{K}^\times \mid \text{ある } A \in GL_n(\mathbb{K}) \text{ が存在して}, \det(A) = r\} = \mathbb{K}^\times \\ &\operatorname{Ker}\det = \{A \in GL_n(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\} = SL_n(\mathbb{K}) \end{aligned}$$

である．ここで，像 $\operatorname{Im}\det$ が $\mathbb{K}^\times$ であることは，任意の $a \in \mathbb{K}^\times$ に対し，

$$\det \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = a$$

であることからわかる．よって，これは全射準同型である．命題 10.3 (2) から，$\operatorname{Ker}\det$ は $GL_n(\mathbb{K})$ の正規部分群だったので，特殊線型群 $SL_n(\mathbb{K})$ が一般線型群 $GL_n(\mathbb{K})$ の正規部分群であることはこの事実からもわかる*2．

---

*1 舞台を有理数にうつすと，加法群 $\mathbb{Q}$ と乗法群 $\mathbb{Q}_{>0}$ は実は同型ではない！今回の本レポート課題にしたので，証明を考えてみること．

*2 命題 10.3 (2) における正規性の証明は第 10 回講義資料例 5 で行った $SL_n(\mathbb{K})$ の正規性の証明とほぼ同じなので「命題 10.3 (2) を使うことが $SL_n(\mathbb{K})$ の正規性の別証明である」と言うことには少し抵抗がある．

**例 7.** $n$ を 2 以上の整数とし，$n$ 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ を考える．$n$ 次対称群の各元 $\sigma$ に対してその符号 $\operatorname{sgn}\sigma$ を対応させる写像

$$\operatorname{sgn}\colon \mathfrak{S}_n \to \{1,-1\}, \sigma \mapsto \operatorname{sgn}\sigma$$

は準同型である (符号については第 6 回講義資料 5.1 節を参照)．実際，第 6 回講義資料定理 5.4 で任意の $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$ に対して，

$$\operatorname{sgn}(\sigma\sigma') = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\sigma')$$

となることを見たが，これは準同型の定義条件に他ならない．

$\mathfrak{S}_n$ には偶置換も奇置換も存在することより，sgn は全射である．また，

$$\operatorname{Ker}\operatorname{sgn} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \operatorname{sgn}\sigma = 1\} = \mathfrak{A}_n$$

である．命題 10.3 (2) から，$\operatorname{Ker}\operatorname{sgn}$ は $\mathfrak{S}_n$ の正規部分群だったので，$n$ 次交代群 $\mathfrak{A}_n$ が $n$ 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の正規部分群であることはこの事実からもわかる[*3]．

**例 8.** $\mathbb{K}$ を $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間は加法 $+$ に関して群をなすのであった (第 1,2 回講義資料例 4 参照)．$V, W$ を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間としたとき，線形写像 $f\colon V \to W$ は準同型でもある．実際，線形写像の性質

$$f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = f(\boldsymbol{v}_1) + f(\boldsymbol{v}_2),\ \forall \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$$

は準同型の定義条件に他ならない．このとき，準同型としての核 $\operatorname{Ker} f$ や像 $\operatorname{Im} f$ は線形写像としての核や像と一致していることが定義からすぐにわかる．

**例 9.** 任意の巡回群 $G = \langle g \rangle = \{g^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ に対し，

$$p\colon \mathbb{Z} \to G,\ m \mapsto g^m$$

は全射準同型である．実際，任意の $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$p(m_1 + m_2) = g^{m_1+m_2} = g^{m_1}g^{m_2} = p(m_1)p(m_2)$$

という性質が成り立つので $p$ は準同型であり，全射性は定義から明らかである．このとき，

$$\operatorname{Ker} p = \{m \in \mathbb{Z} \mid g^m = e\}$$

である．ここで，第 7 回講義資料命題 6.8 より，$g^m = e$ を満たす最小の正の整数が $\operatorname{ord} g$ であった．さらに，$g$ は巡回群 $G$ の生成元なので，$\operatorname{ord} g = |G|$ である．これらより，

$$\begin{cases} |G| = \infty \text{ のとき}, \operatorname{Ker} p = \{0\}. \\ |G| < \infty \text{ のとき}, \operatorname{Ker} p = \langle |G| \rangle = \{k|G| \mid k \in \mathbb{Z}\} = |G| \cdot \mathbb{Z}. \end{cases}$$

となる．実際には $|G| < \infty$ のときの等号についてはもう少しきちんと示す必要があるが，$|G| = \operatorname{ord} g$ の最小性を用いれば難しくないのでこれは練習問題としよう．この結果より，$|G| = \infty$ の場合には，$p$ は単射であることもわかり (命題 10.4 (2))，$p$ は同型であることがわかる．巡回無限群 $G = \langle g \rangle$ は全て加法群 $\mathbb{Z}$ と同型となるのである．

**例 10.** $G$ を群，$N$ をその<u>正規</u>部分群とすると，剰余群 $G/N$ を考えることができた (第 10 回講義資料定理 9.4，定義 9.5)．このとき，商写像

$$p\colon G \to G/N,\ g \mapsto gN$$

は全射準同型である．実際，任意の $g_1, g_2 \in G$ に対して，剰余群の二項演算の定義から，

$$p(g_1g_2) = g_1g_2N = g_1N \cdot g_2N = p(g_1) \cdot p(g_2)$$

[*3] 第 10 回講義資料例 3 ではこの事実は $(\mathfrak{S}_n : \mathfrak{A}_n) = 2$ であることから示していたことも思い出そう．

という性質が成り立つので $p$ は準同型であり，全射性は定義から明らかである．このとき，

$$\operatorname{Ker} p = \{g \in G \mid gN = eN\} = \{g \in G \mid g \in eN\} = N$$

である．例えば $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ として，$G = \mathbb{Z}, N = n\mathbb{Z}$ のとき，

$$p \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ a \mapsto [a]_n$$

は全射準同型であり，$\operatorname{Ker} p = n\mathbb{Z}$ である．

**例 11.** 第 10 回講義資料の例 9, 例 10 を思い出そう．3 次二面体群 $D_3 = \{e, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau\}$ とその正規部分群 $N \coloneqq \langle\sigma\rangle = \{e, \sigma, \sigma^2\}$ に対し，剰余群は

$$D_3/N = \{gN \mid g \in G_3\} = \{N, \tau N\}$$

となり，その乗積表は

| | $N$ | $\tau N$ |
|---|---|---|
| $N$ | $N$ | $\tau N$ |
| $\tau N$ | $\tau N$ | $\tau^2 N = N$ |

であった．また，$n$ 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ と $n$ 次交代群 $\mathfrak{A}_n$ に対し，剰余群は

$$\mathfrak{S}_n/\mathfrak{A}_n = \{\sigma\mathfrak{A}_n \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\} = \{\mathfrak{A}_n, (1\ 2)\mathfrak{A}_n\}$$

となり，その乗積表は

| | $\mathfrak{A}_n$ | $(1\ 2)\mathfrak{A}_n$ |
|---|---|---|
| $\mathfrak{A}_n$ | $\mathfrak{A}_n$ | $(1\ 2)\mathfrak{A}_n$ |
| $(1\ 2)\mathfrak{A}_n$ | $(1\ 2)\mathfrak{A}_n$ | $(1\ 2)^2\mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}_n$ |

であった．以上の乗積表の比較より，写像

$$\phi \colon D_3/N \to \mathfrak{S}_n/\mathfrak{A}_n,\ N \mapsto \mathfrak{A}_n, \tau N \mapsto (1\ 2)\mathfrak{A}_n$$

は同型となることがわかる．さらに，本講義資料の冒頭の例の乗積表とも比べると，写像

$$\phi' \colon D_3/N \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ N \mapsto [0]_2, \tau N \mapsto [1]_n$$

は同型となることがわかる．これらより，

$$\{1, -1\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq D_3/N \simeq \mathfrak{S}_n/\mathfrak{A}_n$$

であることがわかる．実は，位数が 2 の群は全て同型となることを次回解説する．言い方を変えれば，同型の差を除いて位数が 2 の群は実はただ 1 つしかないのである．

**例 12.** 第 10 回講義資料の例 11 を思い出そう．4 次対称群 $\mathfrak{S}_4$ とクラインの 4 元群 $V$ に対し，剰余群は

$$\mathfrak{S}_4/V = \{\sigma V \mid \sigma \in \mathfrak{S}_4\} = \{V, (1\ 2)V, (2\ 3)V, (1\ 3)V, (1\ 2\ 3)V, (1\ 3\ 2)V\}$$

となるのであった．このとき，剰余群における二項演算の定義から $\mathfrak{S}_4/V$ の二項演算は

$$\{e, (1\ 2), (2\ 3), (1\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

の間に成り立つ計算公式と同じとなる．これより，

$$\phi' \colon \mathfrak{S}_3 \to \mathfrak{S}_4/V,\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & j & k & 4 \end{pmatrix} V$$

は同型となる．よって $\mathfrak{S}_3 \simeq \mathfrak{S}_4/V$ である．

**例 13.** $G$ を群とし，$a \in G$ とする．このとき，写像 $\alpha_a\colon G \to G$ を

$$\alpha_a\colon G \to G,\ g \mapsto aga^{-1}$$

と定めると，これは準同型である．実際，任意の $g_1, g_2 \in G$ に対して，

$$\alpha_a(g_1g_2) = ag_1g_2a^{-1} = ag_1aa^{-1}g_2a^{-1} = \alpha_a(g_1)\alpha_a(g_2)$$

が成立する．さらに，上の $a$ を $a^{-1}$ として，$\alpha_{a^{-1}}\colon G \to G,\ g \mapsto a^{-1}ga$ を考えると，任意の $g \in G$ に対し，

$$(\alpha_{a^{-1}} \circ \alpha_a)(g) = a^{-1}(aga^{-1})a = g \qquad (\alpha_a \circ \alpha_{a^{-1}})(g) = a(a^{-1}ga)a^{-1} = g$$

となるので，$\alpha_{a^{-1}} \circ \alpha_a = \alpha_a \circ \alpha_{a^{-1}} = \mathrm{id}_G$ である．よって定義 10.6 より，$\alpha_a$ は同型である．このような $\alpha_a$ $(a \in G)$ を $G$ の**内部自己同型 (inner automorphism)** という．

**例 14** (やや発展)**.** $G$ を群とする．このとき，$G$ から $G$ への同型を全て集めてきてできる集合

$$\mathrm{Aut}(G) \coloneqq \{\phi\colon G \to G \mid \phi は同型\}$$

を考える．同型は全単射写像なので，これは第 5 回講義資料の例 1 で考えた $G$ 上の全単射写像のなす群 $B(G)$(二項演算は写像の合成) の部分集合となるが，実は $\mathrm{Aut}(G)$ は $B(G)$ の部分群となる．この群 $\mathrm{Aut}(G)$ を $G$ の**自己同型群 (automorphism group)** という．このことは以下のように確かめられる．

任意の $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{Aut}(G)$ に対し，命題 10.5 (1) より $\phi_1 \circ \phi_2 \in \mathrm{Aut}(G)$ である (全単射写像の合成は再び全単射であることに注意)．また，任意の $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$ に対し，命題 10.5 (2) より $\phi^{-1}$ も $G$ から $G$ への同型となるので，$\phi^{-1} \in \mathrm{Aut}(G)$(全単射写像の逆写像は全単射であることに注意)．以上より，$\mathrm{Aut}(G)$ は二項演算 (=写像の合成) と逆元を取る操作で閉じているので，$B(G)$ の部分群となる．

さらに，例 13 で考えた内部自己同型全体のなす集合

$$\mathrm{Inn}(G) \coloneqq \{\alpha_a\colon G \to G \mid a \in G\}$$

を考えると，$\alpha_a$ は同型だったので，これは $\mathrm{Aut}(G)$ の部分集合である．このとき，実は $\mathrm{Inn}(G)$ は $\mathrm{Aut}(G)$ の正規部分群となる．この群 $\mathrm{Inn}(G)$ を**内部自己同型群 (inner automorphism group)** という．このことは，次のように確かめられる．

任意の $\alpha_{a_1}, \alpha_{a_2} \in \mathrm{Inn}(G)$ と $g \in G$ に対し，

$$(\alpha_{a_1} \circ \alpha_{a_2})(g) = \alpha_{a_1}(\alpha_{a_2}(g)) = a_1(a_2ga_2^{-1})a_1^{-1} = (a_1a_2)g(a_1a_2)^{-1} = \alpha_{a_1a_2}(g)$$

となるので，

$$\alpha_{a_1} \circ \alpha_{a_2} = \alpha_{a_1a_2} \in \mathrm{Inn}(G) \tag{10.1}$$

である．また，例 13 で見たように，任意の $\alpha_a \in \mathrm{Inn}(G)$ に対して，$\alpha_a^{-1} = \alpha_{a^{-1}} \in \mathrm{Inn}(G)$ であった．以上より，$\mathrm{Inn}(G)$ は二項演算と逆元を取る操作で閉じているので，$\mathrm{Aut}(G)$ の部分群となる．次に正規性を確かめる．任意の $\phi \in \mathrm{Aut}(G), \alpha_a \in \mathrm{Inn}(G)$ と $g \in G$ に対し，

$$(\phi \circ \alpha_a \circ \phi^{-1})(g) = \phi(a\phi^{-1}(g)a^{-1}) = \phi(a)\phi(\phi^{-1}(g))\phi(a^{-1}) = \phi(a)g\phi(a)^{-1} = \alpha_{\phi(a)}(g)$$

となるので，$\phi \circ \alpha_a \circ \phi^{-1} = \alpha_{\phi(a)} \in \mathrm{Inn}(G)$．よって，$\mathrm{Inn}(G)$ は $\mathrm{Aut}(G)$ の正規部分群である．

ここで，(10.1) より少し面白いことがわかる．(10.1) は写像

$$\alpha\colon G \to \mathrm{Inn}(G),\ g \mapsto \alpha_g$$

が全射群準同型であるという式に他ならない．さらにこの核を考えてみると，

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\,\alpha &= \{z \in G \mid \alpha_z = \mathrm{id}_G\}\\ &= \{z \in G \mid zgz^{-1} = g, \forall g \in G\}\\ &= \{z \in G \mid zg = gz, \forall g \in G\} = Z(G)\end{aligned}$$

となる．自己同型群への写像を考えると核が中心となるような準同型が得られるのである．特に，$Z(G) = \{e\}$ のとき ($G = \mathfrak{S}_n, n \geq 3$ など．第 7 回講義資料例 8 参照)，$\alpha$ は同型となり，$G \simeq \mathrm{Inn}(G)$ となる．