代数学 I 第 12 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

群準同型 $\phi\colon G \to G'$ があると，その核 $\operatorname{Ker}\phi$ は G の正規部分群となるのであった (第 11 回講義資料命題 10.3 (2))．これより，剰余群 $G/\operatorname{Ker}\phi$ を考えることができる．今回のテーマである準同型定理はこの群が像 $\operatorname{Im}\phi$ と同型であることを主張する．これはラグランジュの定理に並ぶ群論の重要定理なのでここでしっかり学んでほしい．

11.1 準同型定理

冒頭の導入で述べた準同型定理を早速証明しよう．これは第 1 同型定理とも呼ばれる．なお，全部で第 3 同型定理まであり，本講義資料でも解説するが，とにかく第 1 同型定理をしっかり理解することが重要である．

定理 11.1 (準同型定理 (第 1 同型定理))

$\phi\colon G \to G'$ が群準同型であるとき，写像

$$\overline{\phi}\colon G/\operatorname{Ker}\phi \to \operatorname{Im}\phi,\ g\operatorname{Ker}\phi \mapsto \phi(g)$$

は well-defined な群同型になる．特に，$G/\operatorname{Ker}\phi \simeq \operatorname{Im}\phi$ である．

証明． まず写像 $\overline{\phi}$ の well-defined 性をチェックする．このためには，

$$g_1\operatorname{Ker}\phi = g_2\operatorname{Ker}\phi \text{ であるとき，} \phi(g_1) = \phi(g_2)$$

となることを示せばよい．$g_1\operatorname{Ker}\phi = g_2\operatorname{Ker}\phi$ のとき，$g_1 \overset{\operatorname{Ker}\phi}{\sim}_L g_2$ なので (この記号については第 8 回講義資料定義 7.4 を参照)，ある $k \in \operatorname{Ker}\phi$ が存在して，$g_1 = g_2k$．これより，e' を G' の単位元とすると，

$$\phi(g_1) = \phi(g_2k) = \phi(g_2)\phi(k) = \phi(g_2)e' = \phi(g_2)$$

となる．よって，$\overline{\phi}$ は well-defined である．

次に $\overline{\phi}$ が準同型となることを示す．任意の $g_1\operatorname{Ker}\phi, g_2\operatorname{Ker}\phi \in G/\operatorname{Ker}\phi$ に対し，

$$\overline{\phi}(g_1\operatorname{Ker}\phi \cdot g_2\operatorname{Ker}\phi) = \overline{\phi}(g_1g_2\operatorname{Ker}\phi) = \phi(g_1g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2) = \overline{\phi}(g_1\operatorname{Ker}\phi)\overline{\phi}(g_2\operatorname{Ker}\phi)$$

となるので，$\overline{\phi}$ は確かに準同型である．

後は $\overline{\phi}$ が全単射写像であることを見ればよい．まず，任意の $\operatorname{Im}\phi$ の元はある $g \in G$ を用いて $\phi(g)$ と書けるが，

$$\overline{\phi}(g\operatorname{Ker}\phi) = \phi(g)$$

であるから，$\overline{\phi}$ は全射である．単射性を示す．$\overline{\phi}(g\operatorname{Ker}\phi) = e'$ とする．このとき，$\overline{\phi}$ の定義より，$\phi(g) = e'$．よって，$g \in \operatorname{Ker}\phi = e\operatorname{Ker}\phi$ (e は G の単位元)．これより，

$$g\operatorname{Ker}\phi = e\operatorname{Ker}\phi.$$

よって，

$$\operatorname{Ker}\overline{\phi} = \{g\operatorname{Ker}\phi \in G/\operatorname{Ker}\phi \mid \overline{\phi}(g\operatorname{Ker}\phi) = e'\} = \{e\operatorname{Ker}\phi\}$$

がわかる．ここで，剰余群の定義から $e\operatorname{Ker}\phi$ は $G/\operatorname{Ker}\phi$ の単位元なので第 11 回講義資料命題 10.4 (2) より，$\overline{\phi}$ は単射である． □

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

例 1. 乗法群 $\mathbb{C}^\times$ から $\mathbb{R}^\times$ への絶対値を取る写像

$$|\cdot|\colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{R}^\times,\ z = x+iy \mapsto |z| \coloneqq \sqrt{x^2+y^2}\ (x, y \in \mathbb{R})$$

は準同型であり，

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}|\cdot| &= \{r \in \mathbb{R}^\times \mid \text{ある } z \in \mathbb{C}^\times \text{が存在して，} r = |z|\} = \mathbb{R}_{>0} \\ \operatorname{Ker}|\cdot| &= \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1\} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\} \eqqcolon \mathbb{T}\end{aligned}$$

となるのであった (第 11 回講義資料例 3)．よって，準同型定理より，

$$\mathbb{C}^\times/\mathbb{T} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_{>0},\ z\mathbb{T} \mapsto |z|$$

は同型である．これは "複素数平面において偏角の違い ($\mathbb{T}$ の元倍の差) を同一視すると結局原点からの距離 ($\mathbb{R}_{>0}$) だけを見ていることになる" という事実に対応している．

ちなみに，

$$\phi\colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{T},\ z \mapsto \frac{z}{|z|}$$

という写像を考えるとこれも準同型となっており (各自チェックせよ．任意の $z \in \mathbb{C}^\times$ に対し，$\frac{z}{|z|} \in \mathbb{T}$ であることも確認しないといけないことに注意．)，

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\phi &= \{t \in \mathbb{T} \mid \text{ある } z \in \mathbb{C}^\times \text{が存在して，} t = \frac{z}{|z|}\} = \mathbb{T} \\ \operatorname{Ker}\phi &= \{z \in \mathbb{C}^\times \mid \frac{z}{|z|} = 1\} = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid z = |z|\} = \mathbb{R}_{>0}\end{aligned}$$

である．なお，$\operatorname{Im}\phi = \mathbb{T}$ については任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対し，$\frac{e^{i\theta}}{|e^{i\theta}|} = e^{i\theta}$ であることよりわかる．こちらに対して準同型定理を用いると，

$$\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{\sim} \mathbb{T},\ z\mathbb{R}_{>0} \mapsto \frac{z}{|z|}$$

が同型であることがわかる．こちらは "複素数平面において原点からの距離のみが違う元 ($\mathbb{R}_{>0}$ の元倍の差) を同一視すると結局偏角 ($\mathbb{T}$) だけを見ていることになる" という事実に対応している．

例 2. 加法群 $\mathbb{R}$ から乗法群 $\mathbb{C}^\times$ への写像

$$\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times,\ \theta \mapsto e^{2\pi i\theta}$$

は準同型である．実際，任意の $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\phi(\theta_1+\theta_2) = e^{2\pi i(\theta_1+\theta_2)} = e^{2\pi i\theta_1}e^{2\pi i\theta_2} = \phi(\theta_1)\phi(\theta_2)$$

が成立する．このとき，

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\phi &= \{z \in \mathbb{C}^\times \mid \text{ある}\theta \in \mathbb{R} \text{ が存在して，} z = e^{2\pi i\theta}\} = \mathbb{T} \\ \operatorname{Ker}\phi &= \{\theta \in \mathbb{R} \mid e^{2\pi i\theta} = 1\} = \mathbb{Z}\end{aligned}$$

である．よって，準同型定理より，

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{T},\ \theta + \mathbb{Z} \mapsto e^{2\pi i\theta}$$

は同型である．

例 3. n を正の整数とし，$\mathbb{K}$ を $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．n 次一般線型群 $GL_n(\mathbb{K})$ の各元に対し，その行列式を与える写像

$$\det\colon GL_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^\times,\ A \mapsto \det(A)$$

は全射準同型であり，

$$\operatorname{Ker}\det = \{A \in GL_n(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\} = SL_n(\mathbb{K})$$

となるのであった (第 11 回講義資料例 6)．よって，準同型定理より，

$$GL_n(\mathbb{K})/SL_n(\mathbb{K}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^\times,\ A \cdot SL_n(\mathbb{K}) \mapsto \det(A)$$

が同型であることがわかる．

例 4. n を 2 以上の整数とする．n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の各元に対し，その符号を対応させる写像

$$\operatorname{sgn}\colon \mathfrak{S}_n \to \{1,-1\}, \sigma \mapsto \operatorname{sgn}\sigma$$

は全射準同型であり，

$$\operatorname{Ker}\operatorname{sgn} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \operatorname{sgn}\sigma = 1\} = \mathfrak{A}_n$$

となるのであった (第 11 回講義資料例 7)．よって，準同型定理より，

$$\mathfrak{S}_n/\mathfrak{A}_n \xrightarrow{\sim} \{1,-1\},\ \sigma\mathfrak{A}_n \mapsto \operatorname{sgn}\sigma$$

が同型であることがわかる．

例 5. 任意の有限巡回群 $G = \langle g \rangle = \{g^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ に対し，

$$p\colon \mathbb{Z} \to G,\ m \mapsto g^m$$

は全射準同型であり，

$$\operatorname{Ker} p = \langle |G| \rangle = \{k|G| \mid k \in \mathbb{Z}\} = |G| \cdot \mathbb{Z}.$$

となるのであった (第 11 回講義資料例 9)．よって，準同型定理より，

$$\mathbb{Z}/|G| \cdot \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} G,\ [m]_{|G|} \mapsto g^m$$

が同型であることがわかる．よって，第 11 回講義資料例 9 の $|G| = \infty$ の場合の考察と合わせて以下の定理が言える．

定理 11.2

n を正の整数とすると，位数が n の巡回群は必ず $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と同型である．また，位数が無限の巡回群は必ず $\mathbb{Z}$ と同型となる．

さらに，第 9 回講義資料系 8.5 と合わせると次が言える．

定理 11.3

位数が素数 p の群は必ず $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ と同型である．

第 11 回講義資料例 11 で様々な位数 2 の群が $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と同型になることを乗積表を見ながら確かめたが，実は全て同型となることは定理 11.3 の特別な場合として従う話だったのである ($p = 2$ の場合)．

コラム：有限群の分類 (進んで勉強したい方向け)

定理 11.3 では群の位数を素数とすると，そのような群は同型なものを同一視すると 1 通りしかないということを見た．群の定義は非常に抽象的なものであったのにも関わらず，位数によってはこれほどまでに構造がきっちりと決まってしまうというのは大変面白い．一般に正の整数 n に対して「同型なものを同一視したうえで位数 n の群が何通りあるか?」という問題を**位数 n の群の分類問題**という．その中でも特に大事なのは，以下で定義される単純群の分類である．

定義 11.4

群 G が自明な正規部分群 $G, \{e\}$ 以外に<u>正規</u>部分群を持たないとき，G を**単純群 (simple group)** という．

もし群 G が単純群でない場合，G は非自明な正規部分群 N を含む．このとき，G の構造は，正規部分群 N と

それによる剰余群 G/N という G よりも小さな群を調べることから調べ始めることができる (もちろん N と G/N の構造が分かれば G の構造が全てわかるわけではないのだが，大きな助けにはなる)．この意味で，これ以上分割できない "群の世界の原子" に当たるものが単純群なのである．これは自然数の世界で素数が重要であったこととも似ていると考えればその重要性がわかるであろう．そして，なんと驚くべきことに有限単純群は分類されているのである！分類は以下の通りである．

(1) 巡回群 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，p は素数.
(2) 交代群 $\mathfrak{A}_n$，$n \geq 5$.
(3) Lie 型の単純群 (Tits 群を含む).
(4) 26 個の散在型単純群.

(1)–(3) の型については，それぞれ無限個存在しており，それ以外だと (4) の 26 個だけになるという状況である．(4) の 26 個の例外の中で最も大きい群の位数は

$$808017424794512875886459904961710757005754368000000000$$

であり，**モンスター群**と呼ばれる．この分類定理は (主に)20 世紀の多くの数学者による膨大な研究の賜物であり，証明を説明することは到底できないが，結果としては知っていても良いであろう．歴史的な部分やより詳細について知りたい方は，『鈴木 通夫, "有限単純群の分類", 数学, 1982 年 34 巻 3 号, 193–210 `https://doi.org/10.11429/sugaku1947.34.193`』などが参考になる．他にも「有限単純群の分類」で検索すると様々な面白い記事に当たることができる．

例 6 (やや発展)**.** G を群とする．G から自己同型群 $\mathrm{Aut}(G) \coloneqq \{\phi\colon G \to G \mid \phi$は同型 $\}$ への写像

$$\alpha\colon G \to \mathrm{Aut}(G),\ a \mapsto (\alpha_a\colon g \mapsto aga^{-1})$$

は準同型であり，

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,\alpha &= \{\alpha_a \mid a \in G\} =: \mathrm{Inn}(G)\\ \mathrm{Ker}\,\alpha &= Z(G)\ (G\text{ の中心})\end{aligned}$$

となるのであった (第 11 回講義資料例 14)．よって，準同型定理より，

$$G/Z(G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Inn}(G),\ aZ(G) \mapsto \alpha_a$$

が同型であることがわかる．一見とらえどころのない内部自己同型群 $\mathrm{Inn}(G)$ は $G/Z(G)$ に同型だったのである．例えば，n を正の整数とし，$\mathbb{K}$ を $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とするとき，

$$\mathrm{Inn}(GL_n(\mathbb{K})) \simeq GL_n(\mathbb{K})/Z(GL_n(\mathbb{K})) =: PGL_n(\mathbb{K})\ (\text{射影一般線型群})$$

となる．射影一般線型群は 一般線型群の内部自己同型群に同型な群だったのである．

次に第 2 同型定理を示そう．

定理 11.5 (第 2 同型定理)

G を群，H を G の部分群，N を G の<u>正規</u>部分群とする．このとき，

$$HN \coloneqq \{hn \mid h \in H, n \in N\}$$

は G の部分群，$H \cap N$ は H の<u>正規</u>部分群であり，

$$H/(H \cap N) \to HN/N,\ h(H \cap N) \mapsto hN \tag{11.1}$$

は well-defined な群同型になる．特に，$H/(H \cap N) \simeq HN/N$ である．

証明.

HN が G の部分群であること：任意の $h_1n_1, h_2n_2 \in HN$ $(h_1, h_2 \in H, n_1, n_2 \in N)$ に対し，

$$h_1n_1h_2n_2 = h_1h_2(h_2^{-1}n_1h_2)n_2.$$

いま N は正規部分群なので $h_2^{-1}n_1h_2 \in N$ であるから，$(h_2^{-1}n_1h_2)n_2 \in N$ であるので，上式の右辺は HN の元である．よって，$h_1n_1h_2n_2 \in HN$.

次に任意の $hn \in HN$ $(h \in H, n \in N)$ に対して，

$$(hn)^{-1} = n^{-1}h^{-1} = h^{-1}(hn^{-1}h^{-1}).$$

いま N は正規部分群なので $hn^{-1}h^{-1} \in N$ であるから，上式の右辺は HN の元である．よって，$(hn)^{-1} \in HN$．以上より，HN は二項演算と逆元を取る操作で閉じているので，G の部分群である．

$H \cap N$ が H の正規部分群であること，(11.1) が well-defined な群同型であること：

写像

$$\phi\colon H \to HN/N,\ h \mapsto hN$$

を考える．任意の $h_1, h_2 \in H$ に対し，

$$\phi(h_1h_2) = h_1h_2N = h_1N \cdot h_2N = \phi(h_1) \cdot \phi(h_2)$$

となるので，ϕ は準同型である．また，任意の $h \in H, n \in N$ に対して，$hnN = hN \in HN/N$ なので，

$$HN/N = \{hnN \mid h \in H, n \in N\} = \{hN \mid h \in H\} = \operatorname{Im}\phi$$

となり，ϕ は全射であることがわかる．さらに，

$$\operatorname{Ker}\phi = \{h \in H \mid hN = N\} = \{h \in H \mid h \in N\} = H \cap N.$$

これより，第 11 回講義資料命題 10.3 (2) から $\operatorname{Ker}\phi = H \cap N$ は H の正規部分群であり，準同型定理から，

$$H/(H \cap N) \xrightarrow{\sim} HN/N,\ h(H \cap N) \mapsto hN$$

は well-defined な群同型になる． □

例 7. $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする．定理 11.5 の設定で，

$$G = \mathbb{Z}, \quad H = m\mathbb{Z} \coloneqq \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad N = n\mathbb{Z} \coloneqq \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

としたものを考える．ここで，$\mathbb{Z}$ は可換群なので，部分群 $n\mathbb{Z}$ は正規部分群であることに注意する．このとき，$\mathbb{Z}$ の二項演算は $+$ であることに注意して，

$$\begin{aligned}
m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} &= \{\ell \in \mathbb{Z} \mid \ell \text{は } m \text{ でも } n \text{ でも割り切れる }\} \\
&= \{\ell \in \mathbb{Z} \mid \ell \text{は } m \text{ と } n \text{ の最小公倍数} \operatorname{lcm}(m,n) \text{ で割り切れる }\} \\
&= \operatorname{lcm}(m,n) \cdot \mathbb{Z}. \\
m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} &= \{mk_1 + nk_2 \mid k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\} = \gcd(m,n) \cdot \mathbb{Z}. \quad \text{(第 3 回講義資料定理 2.4)}
\end{aligned}$$

なお，最後の等号は拡張ユークリッド互除法からわかることであったことを思い出そう．これらより第 2 同型定理から，

$$m\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} (m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z})/n\mathbb{Z},\ mk + (m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}) \mapsto mk + n\mathbb{Z},$$

すなわち，

$$m\mathbb{Z}/\operatorname{lcm}(m,n) \cdot \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \gcd(m,n) \cdot \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ [mk]_{\operatorname{lcm}(m,n)} \mapsto [mk]_n$$

が well-defined な群同型を与えることがわかる．例えば，$m = 6, n = 15$ のとき，

$$6\mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} 3\mathbb{Z}/15\mathbb{Z},\ [6k]_{30} \mapsto [6k]_{15}$$

は群同型を与える．特に，

$$|m\mathbb{Z}/\operatorname{lcm}(m,n)\cdot\mathbb{Z}| = \operatorname{lcm}(m,n)/m, \quad |\gcd(m,n)\cdot\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = n/\gcd(m,n)$$

であるので，この 2 つの群が同型であることから，

$$\operatorname{lcm}(m,n)/m = n/\gcd(m,n)$$

となるはずである ($m=6, n=15$ の例では，$30/6=15/3$)．これは純粋に整数の問題なので第 2 同型定理を使わない説明も考えて見てほしい．

例 8. 定理 11.5 の設定で，

$$G = GL_2(\mathbb{C}), \quad H = SL_2(\mathbb{C}), \quad N = Z(GL_2(\mathbb{C})) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{C}^\times \right\}$$

としたものを考える．なお，$Z(GL_2(\mathbb{C}))$ は $GL_2(\mathbb{C})$ の中心であり，その計算は第 7 回講義資料例 7 で行われていたことを思い出そう．また，第 10 回講義資料例 7 で，中心が正規部分群であることも示されている．このとき，

$$SL_2(\mathbb{C}) \cap Z(GL_2(\mathbb{C})) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{C}^\times, \det \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a^2 = 1 \right\} = \{I_2, -I_2\}$$

(I_2 は 2 次単位行列) であり，

$$SL_2(\mathbb{C})Z(GL_2(\mathbb{C})) = GL_2(\mathbb{C})$$

である (理由を考えよ)[*1]．これらより，第 2 同型定理から，

$$SL_2(\mathbb{C})/\{\pm I_2\} \xrightarrow{\sim} GL_2(\mathbb{C})/Z(GL_2(\mathbb{C})) = PGL_2(\mathbb{C}),\ \{\pm g\} \mapsto gZ(GL_2(\mathbb{C})),$$

が well-defined な群同型を与えることがわかる．

例 9. n を 3 以上の整数とし，n 次二面体群 $D_n = \{\sigma^k\tau^\ell \mid k=0,\ldots,n-1, \ell=0,1\}$ を考える ($\sigma^n = e, \tau^2 = e, \sigma^k\tau = \tau\sigma^{-k}$ $(k \in \mathbb{Z})$)．定理 11.5 の設定で，

$$G = D_n, \quad H = \langle\tau\rangle = \{e,\tau\}, \quad N = \langle\sigma\rangle = \{e,\sigma,\ldots,\sigma^{n-1}\}$$

としたものを考える．H は D_n の正規でない部分群であり，N は D_n の正規部分群であったことを思い出そう (第 10 回講義資料例 2，命題 9.2 参照)．このとき，

$$HN = \{\tau^\ell\sigma^k \mid \ell=0,1, k=0,\ldots,n-1\} = D_n, \qquad H \cap N = \{e\}$$

であるので，第 2 同型定理より，

$$H \simeq H/\{e\} \xrightarrow{\sim} D_n/N,\ e \mapsto eN,\ \tau \mapsto \tau N$$

は群同型になることがわかる．

最後に第 3 同型定理を示す．

定理 11.6 (第 3 同型定理)

G を群，M, N を $M \subset N$ を満たす G の<u>正規</u>部分群とする．このとき，剰余群 N/M は剰余群 G/M の正規部分群であり，

$$(G/M)/(N/M) \to G/N,\ (gM)\cdot N/M \mapsto gN$$

は well-defined な群同型になる．特に，$(G/M)/(N/M) \simeq G/N$ である．(M で "約分" できる．)

[*1] どんな $GL_2(\mathbb{C})$ の元も適切な単位行列の定数倍を掛ければ行列式の値が 1 になるようにできる (つまり $SL_2(\mathbb{C})$ の元にできる) ということを示せば良い．

証明. 写像

$$\phi\colon G/M \to G/N,\ gM \mapsto gN$$

を考える．これが well-defined であることを示そう．

$$g_1M = g_2M \text{ であるとき，} g_1N = g_2N$$

となることを示せばよい．$g_1M = g_2M$ のとき，$g_1 \overset{M}{\sim}_L g_2$ なので，ある $m \in M$ が存在して，$g_1 = g_2m$ となる．いま $M \subset N$ であるので，m は N の元でもあるから，このとき $g_1 \overset{N}{\sim}_L g_2$ でもある．よって，$g_1N = g_2N$．これより ϕ の well-defined 性が示された．さらに，任意の $g_1, g_2 \in G$ に対し，

$$\phi(g_1M \cdot g_2M) = \phi(g_1g_2M) = g_1g_2N = g_1N \cdot g_2N = \phi(g_1M) \cdot \phi(g_2M)$$

となるので，ϕ は準同型である．また，

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\phi &= \{\phi(gM) \mid g \in G\} = \{gN \mid g \in G\} = G/N,\\
\operatorname{Ker}\phi &= \{gM \in G/M \mid gN = N\} = \{gM \in G/M \mid g \in N\} = N/M.
\end{aligned}$$

よって，第 11 回講義資料命題 10.3 (2) から $\operatorname{Ker}\phi = N/M$ は G/M の正規部分群であり，準同型定理から，

$$(G/M)/(N/M) \xrightarrow{\sim} G/N,\ (gM) \cdot N/M \mapsto gN$$

は well-defined な群同型になる． □

例 10. $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ とし，m は n で割り切れるとする．定理 11.6 の設定で，

$$G = \mathbb{Z}, \quad M = m\mathbb{Z}, \quad N = n\mathbb{Z}$$

としたものを考える．このとき，$\mathbb{Z}$ は可換群なので，M, N は共に正規部分群であり，さらに $m\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z}$ となる (=m の倍数は自動的に n の倍数)．これより，これらは第 3 同型定理の仮定を満たしているので，第 3 同型定理より，

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})/(n\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ ([a]_m + n\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \mapsto [a]_n$$

が well-defined な群同型を与えることがわかる．例えば，$m = 12, n = 6$ のとき，

$$(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/(6\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z},\ ([a]_{12} + 6\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \mapsto [a]_6$$

が well-defined な群同型を与える．

例 11. 定理 11.6 の設定で，

$$G = \mathfrak{S}_4, \quad M = V, \quad N = \mathfrak{A}_4$$

としたものを考える．ここで，V はクラインの 4 元群 (第 10 回講義資料例 4) である．このとき，第 10 回講義資料例 4 での考察より，これらは第 3 同型定理の仮定を満たしているので，第 3 同型定理より，

$$(\mathfrak{S}_4/V)/(\mathfrak{A}_4/V) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}_4/\mathfrak{A}_4 (\simeq \{1, -1\}),\ (\sigma V) \cdot \mathfrak{A}_4/V \mapsto \sigma\mathfrak{A}_4$$

が well-defined な群同型を与えることがわかる．