

代数学 I 第 13 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

n 次対称群 S_n は「 $1, 2, \dots, n$ の置換」が合成に関してなす構造を反映した代数的対象であった。また、 n 次二面体群は「正 n 角形の板の対称変換」が合成に関してなす構造を反映した代数的対象であった。しかし、これらは群としての性質を見る上では二項演算の形式的なルールさえ覚えておけば、各元が「 $1, 2, \dots, n$ の置換」であるとか、「正 n 角形の板の対称変換」であるといったことは忘れても様々な計算ができた。群はこのように変換の集まりにおける合成法則を形式化して得られるごく抽象的な対象である。この抽象的な群に「 $1, 2, \dots, n$ の置換」や「正 n 角形の板の対称変換」という意味を持たせることは、群を具体的に「表現」することに対応する。これは 2 という数は抽象的なものであるが、これに「木」や「リンゴ」という意味を持たせると「2 本の木」や「2 つのリンゴ」というように 2 の「表現」が得られるということに似ているかもしれない。

今回は群という抽象的な対象がある集合上の変換の集まりとして「表現」される状況を定式化する。このような状況を群がある集合に作用しているという。*1

12.1 群の作用

冒頭にも述べた群の作用をきちんと定義しよう。

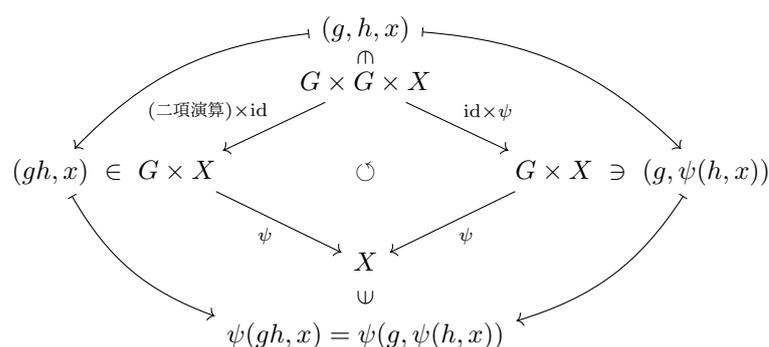
定義 12.1

群 G と集合 X に対し、 X 上の G の作用 (action of G on X) とは、写像

$$\psi: G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto \psi(g, x)$$

であって、次の 2 条件を満たすものを言う。

- (1) 任意の $x \in X$ に対し、 $\psi(e, x) = x$ 。ただし、 e は G の単位元。
- (2) 任意の $g, h \in G, x \in X$ に対し、 $\psi(gh, x) = \psi(g, \psi(h, x))$ 。この条件は以下の図式で表される。



注意 1. 作用は $\psi(g, x)$ を単に $g \cdot x$ と書くことにするとしばしば見やすく便利である。以下ではこの記号を頻繁に用いる。(群の二項演算と混乱しないように!) 例えば、作用の定義条件はこの記法を用いると以下のよう書ける。

* e-mail: hoyo@shibaura-it.ac.jp

*1 実は「表現 (representation)」というのは数学用語できちんと定義がある。そして少し宣伝になるが私 (大矢) の専門分野はまさにこの表現を調べる表現論と呼ばれる分野である。表現とはもう少しちゃんと言うと「ベクトル空間への線型な作用」ということになる。次回の講義資料でこのあたりに簡単に触れたいと思う。もしもこのような内容を進んで勉強してみたいという方は、3 年生の研究室配属時に私の研究室を候補に入れていただくと良いだろう。

- (1)' 任意の $x \in X$ に対し, $e \cdot x = x$.
 (2)' 任意の $g, h \in G, x \in X$ に対し, $gh \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$.

注意 2. ここで定義した作用は左作用と呼ばれるものである. 講義内では左作用のみを扱うのでこれを単に作用と呼ぶことにする. ちなみに, 集合 X 上の群 G の右作用 (**right action of G on X**) とは, 写像

$$\psi: G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto \psi(g, x)$$

であって, 次の 2 条件を満たすもののことを言う.

- (i) 任意の $x \in X$ に対し, $\psi(e, x) = x$. ただし, e は G の単位元. (左作用の定義条件の (1) と同じ)
 (ii) 任意の $g, h \in G, x \in X$ に対し, $\psi(gh, x) = \psi(h, \psi(g, x))$.

右作用の定義条件も $\psi(g, x)$ を単に $x \cdot g$ と書くことにすると以下のように見やすくなる.

- (i)' 任意の $x \in X$ に対し, $x \cdot e = x$.
 (ii)' 任意の $g, h \in G, x \in X$ に対し, $x \cdot gh = (x \cdot g) \cdot h$.

例 1. n を正の整数とし, $X := \{1, 2, \dots, n\}$ としたとき, 写像

$$\mathfrak{S}_n \times X \rightarrow X, (\sigma, i) \mapsto \sigma \cdot i := \sigma(i)$$

は X 上の \mathfrak{S}_n の作用を定める. 例えば, $n = 5$ の場合,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot 1 = 3, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot 2 = 1, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot 5 = 5$$

などとなる. これが作用であることは次のように確かめられる.

- (1) 任意の $i \in X$ に対し, $e \cdot i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} (i) = i$.
 (2) 任意の $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_n, i \in X$ に対し, $(\sigma_1 \sigma_2) \cdot i = (\sigma_1 \circ \sigma_2)(i) = \sigma_1(\sigma_2(i)) = \sigma_1 \cdot (\sigma_2 \cdot i)$.

例 2. 例 1 は次のように一般化できる. X を任意の空でない集合とする. 第 5 回講義資料例 1 で考えた, X から X への全単射写像全体のなす群

$$B(X) := \{f: X \rightarrow X \mid f \text{ は全単射}\}$$

を考える. ここで, 二項演算は写像の合成 \circ , 単位元は X 上の恒等写像 id_X であった. n 次対称群 \mathfrak{S}_n の定義は $B(\{1, 2, \dots, n\})$ であったので (第 5 回講義資料定義 4.1), 上の $B(X)$ という群は対称群の一般化とすることができる. このとき, 写像 ψ を

$$\psi: B(X) \times X \rightarrow X, (f, x) \mapsto f \cdot x := f(x)$$

とすると, これは X 上の $B(X)$ の作用を定める. これは例 1 の一般化であり, 作用であることのチェックは例 1 と全く同様である.

例 3. 写像

$$\psi: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (a, n) \mapsto n - a$$

は集合 \mathbb{Z} 上の加法群 \mathbb{Z} の作用を定める ($\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ の左側の \mathbb{Z} が加法群と思う方). これが作用であることは次のように確かめられる.

- (1) 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し, $\psi(0, n) = n - 0 = n$.
 (2) 任意の $a_1, a_2, n \in \mathbb{Z}$ に対し, $\psi(a_1 + a_2, n) = n - (a_1 + a_2) = (n - a_2) - a_1 = \psi(a_1, \psi(a_2, n))$.

ここで引き算 $-$ は結合法則を満たさないため, 集合 \mathbb{Z} は $-$ を二項演算として群にはならなかったことも合わせて思い出そう (第 1,2 回講義資料例 2).

写像

$$\psi': \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (a, n) \mapsto a^2 + n$$

は集合 \mathbb{Z} 上の加法群 \mathbb{Z} の作用ではない. なぜなら, このとき $a_1 a_2 \neq 0$ となる a_1, a_2 に対して,

$$\psi'(a_1 + a_2, n) = (a_1 + a_2)^2 + n = a_1^2 + 2a_1 a_2 + a_2^2 + n \neq a_1^2 + a_2^2 + n = \psi'(a_1, \psi'(a_2, n))$$

となり, 作用の定義条件の (2) が満たされないためである (なお, 定義条件 (1) は満たされる).

写像

$$\psi'': \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (a, n) \mapsto 0 \quad (\text{全てを } 0 \text{ に送る})$$

は集合 \mathbb{Z} 上の加法群 \mathbb{Z} の作用ではない. なぜなら, このとき $n \neq 0$ に対し,

$$\psi''(0, n) = 0 \neq n$$

となり, 作用の定義条件の (1) が満たされないためである (なお, 定義条件 (2) は満たされる).

例 4. n を正の整数とし, \mathbb{K} を \mathbb{Q}, \mathbb{R} または \mathbb{C} とする. このとき, 写像

$$\psi: GL_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n, (A, \mathbf{v}) \mapsto A\mathbf{v} \quad (\text{行列の積})$$

は \mathbb{K}^n 上の一般線型群 $GL_n(\mathbb{K})$ の作用を定める (\mathbb{K}^n の元は n 次列ベクトルと考える). 例えば, $n = 2$ のときこの写像は具体的には以下である:

$$\psi: GL_2(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2, \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

これが作用であることは次のように確かめられる.

- (1) 任意の $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$ に対し, $\psi(I_n, \mathbf{v}) = I_n \mathbf{v} = \mathbf{v}$. ただし, I_n は n 次単位行列 ($GL_n(\mathbb{K})$ の単位元).
- (2) 任意の $A_1, A_2 \in GL_n(\mathbb{K}), \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$ に対し,

$$\psi(A_1 A_2, \mathbf{v}) = (A_1 A_2) \mathbf{v} = A_1 (A_2 \mathbf{v}) = \psi(A_1, \psi(A_2, \mathbf{v})) \quad (\text{行列の積の結合則}).$$

また,

$$\text{Mat}_n(\mathbb{K}) := \{A \mid A \text{ は } \mathbb{K} \text{ の元を成分とする } n \times n \text{ 行列}\}$$

とすると, 写像

$$\psi': GL_n(\mathbb{K}) \times \text{Mat}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{K}), (P, A) \mapsto PAP^{-1}$$

は $\text{Mat}_n(\mathbb{K})$ 上の $GL_n(\mathbb{K})$ の作用を定める. これが作用であることは次のように確かめられる.

- (1) 任意の $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ に対し, $\psi'(I_n, A) = I_n A I_n^{-1} = A$.
- (2) 任意の $P_1, P_2 \in GL_n(\mathbb{K}), A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ に対し,

$$\psi'(P_1 P_2, A) = P_1 P_2 A (P_1 P_2)^{-1} = P_1 (P_2 A P_2^{-1}) P_1^{-1} = \psi'(P_1, \psi'(P_2, A)).$$

例 5. \mathbb{R} 上の実数値連続関数全体のなす集合を $C^0(\mathbb{R})$ と書く. このとき,

$$\psi: \mathbb{R} \times C^0(\mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R}), (r, f(x)) \mapsto f(x+r) \quad (\text{関数の平行移動})$$

は $C^0(\mathbb{R})$ 上の加法群 \mathbb{R} の作用を定める. これが作用であることは次のように確かめられる.

- (1) 任意の $f(x) \in C^0(\mathbb{R})$ に対し, $\psi(0, f(x)) = f(x+0) = f(x)$.
- (2) 任意の $r_1, r_2 \in \mathbb{R}, f(x) \in C^0(\mathbb{R})$ に対し,

$$\psi(r_1 + r_2, f(x)) = f(x + (r_1 + r_2)) = f((x + r_1) + r_2) = \psi(r_1, f(x + r_2)) = \psi(r_1, \psi(r_2, f(x))).$$

例 6. n 変数の複素係数多項式全体の集合を

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] := \left\{ \sum_{\ell_1 \geq 0, \dots, \ell_n \geq 0} a_{\ell_1, \dots, \ell_n} x_1^{\ell_1} \cdots x_n^{\ell_n} \mid a_{\ell_1, \dots, \ell_n} \in \mathbb{C}, a_{\ell_1, \dots, \ell_n} \text{は有限個を除いて } 0 \right\}$$

とする. 例えば, $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ は複素係数の 3 変数多項式

$$1, x_1 + x_1 x_3, 2i + (1+i)x_1^3 + \sqrt{2}x_1^4, 2\pi i x_2^5 x_3^2$$

等をとにかく全て集めてきてできる集合である (これは \mathbb{C} 上のベクトル空間となる). 「 $a_{\ell_1, \dots, \ell_n}$ は有限個を除いて 0」という条件は単項式の無限和は考えず, 有限個の項を持つもののみを考えるという意味である. このとき, 写像

$$\mathfrak{S}_n \times \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$$

を変数の入れ替えで,

$$\left(\sigma, \sum_{\ell_1 \geq 0, \dots, \ell_n \geq 0} a_{\ell_1, \dots, \ell_n} x_1^{\ell_1} \cdots x_n^{\ell_n} \right) \mapsto \sigma \cdot \left(\sum_{\ell_1 \geq 0, \dots, \ell_n \geq 0} a_{\ell_1, \dots, \ell_n} x_1^{\ell_1} \cdots x_n^{\ell_n} \right) = \sum_{\ell_1 \geq 0, \dots, \ell_n \geq 0} a_{\ell_1, \dots, \ell_n} x_{\sigma(1)}^{\ell_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{\ell_n}$$

と定める. これは $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ 上の n 次対称群 \mathfrak{S}_n の作用を定める. 例えば, $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ においては,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot (x_1^5 x_2^2) &= x_3^5 x_1^2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot (1 + x_1 + x_2^2 x_3^3) &= 1 + x_2 + x_3^2 x_1^3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot (x_1 + x_2 + x_3) &= x_3 + x_2 + x_1 = x_1 + x_2 + x_3 \end{aligned}$$

のようにする (つまり対称群の元が指定するように変数を入れ替える). これが作用であることは次のように確かめられる.

(1) 任意の $\sum_{\ell_1 \geq 0, \dots, \ell_n \geq 0} a_{\ell_1, \dots, \ell_n} x_1^{\ell_1} \cdots x_n^{\ell_n} \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ に対し,

$$e \cdot \left(\sum_{\ell_1 \geq 0, \dots, \ell_n \geq 0} a_{\ell_1, \dots, \ell_n} x_1^{\ell_1} \cdots x_n^{\ell_n} \right) = \sum_{\ell_1 \geq 0, \dots, \ell_n \geq 0} a_{\ell_1, \dots, \ell_n} x_{e(1)}^{\ell_1} \cdots x_{e(n)}^{\ell_n} = \sum_{\ell_1 \geq 0, \dots, \ell_n \geq 0} a_{\ell_1, \dots, \ell_n} x_1^{\ell_1} \cdots x_n^{\ell_n}.$$

ここで, e は \mathfrak{S}_n の単位元, すなわち恒等写像 $\{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}, k \mapsto k$.

(2) 任意の $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_n, \sum_{\ell_1 \geq 0, \dots, \ell_n \geq 0} a_{\ell_1, \dots, \ell_n} x_1^{\ell_1} \cdots x_n^{\ell_n} \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ に対し,

$$\begin{aligned} \sigma_1 \sigma_2 \cdot \left(\sum_{\ell_1 \geq 0, \dots, \ell_n \geq 0} a_{\ell_1, \dots, \ell_n} x_1^{\ell_1} \cdots x_n^{\ell_n} \right) &= \sum_{\ell_1 \geq 0, \dots, \ell_n \geq 0} a_{\ell_1, \dots, \ell_n} x_{\sigma_1(\sigma_2(1))}^{\ell_1} \cdots x_{\sigma_1(\sigma_2(n))}^{\ell_n} \\ &= \sigma_1 \cdot \left(\sum_{\ell_1 \geq 0, \dots, \ell_n \geq 0} a_{\ell_1, \dots, \ell_n} x_{\sigma_2(1)}^{\ell_1} \cdots x_{\sigma_2(n)}^{\ell_n} \right) \\ &= \sigma_1 \cdot \left(\sigma_2 \cdot \left(\sum_{\ell_1 \geq 0, \dots, \ell_n \geq 0} a_{\ell_1, \dots, \ell_n} x_1^{\ell_1} \cdots x_n^{\ell_n} \right) \right). \end{aligned}$$

(2) に対応する条件を具体例でも見ておこう. $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ において,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot (1 + x_1 + x_2^2 x_3^3) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot (1 + x_1 + x_2^2 x_3^3) = 1 + x_2 + x_3^2 x_1^3 = 1 + x_2 + x_1^3 x_3^2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot (1 + x_1 + x_2^2 x_3^3) \right) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot (1 + x_1 + x_2^2 x_3^3) = 1 + x_2 + x_3^2 x_1^3 = 1 + x_2 + x_1^3 x_3^2 \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot (1 + x_1 + x_2^2 x_3^3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot (1 + x_1 + x_2^2 x_3^3) \right).$$

なおこの作用は群の概念がきちんと定義される以前の Lagrange らの時代から研究されていた歴史の古い作用である。実際このような作用の研究 (多項式における変数の入れ替え) から、置換群やより一般の群の概念が生まれてきたといえることができる。

例 7. G を群とし, e をその単位元とする. このとき, 二項演算の写像

$$\psi_\ell: G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto gh$$

は集合 G 上の群 G の作用を定めているとも考えられる ($G \times G$ の左側の G が群と思う方). 実際, 以下のよう
に作用であることが確かめられる.

- (1) 任意の $g \in G$ に対し, $\psi_\ell(e, g) = eg = g$.
- (2) 任意の $g_1, g_2, h \in G$ に対し,

$$\psi_\ell(g_1 g_2, h) = (g_1 g_2)h = g_1(g_2 h) = \psi_\ell(g_1, \psi_\ell(g_2, h)) \quad (\text{群の二項演算の結合法則}).$$

また, H を G の部分群とし, 写像

$$\psi_{\ell, H}: G \times (G/H) \rightarrow G/H, (g, g'H) \mapsto gg'H$$

を考えると, これは商集合 G/H 上の群 G の作用を定める. 作用であることのチェックは上の ψ_ℓ の場合と全く同様である.

写像

$$\psi_{\text{ad}}: G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto ghg^{-1}$$

は集合 G 上の群 G の作用を定める ($G \times G$ の左側の G が群と思う方). これが作用であることは次のように
確かめられる.

- (1) 任意の $g \in G$ に対し, $\psi_{\text{ad}}(e, g) = ege^{-1} = g$.
- (2) 任意の $g_1, g_2, h \in G$ に対し,

$$\psi_{\text{ad}}(g_1 g_2, h) = (g_1 g_2)h(g_1 g_2)^{-1} = g_1(g_2 h g_2^{-1})g_1^{-1} = \psi_{\text{ad}}(g_1, \psi_{\text{ad}}(g_2, h)).$$

作用 ψ_{ad} は随伴作用 (**adjoint action**) と呼ばれる.

12.2 軌道・固定部分群

定義 12.2

$G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto g \cdot x$ を集合 X 上の群 G の作用とする. G の作用による $x \in X$ の G -軌道 (G -orbit) を

$$G \cdot x := \{g \cdot x \mid g \in G\} (\subset X)$$

と定める. 言葉で書くと, 「 x から G の元を作用させることで作れる元全体」である. また, $x \in X$ における G の固定部分群 (stabilizer) を

$$G_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\} (\subset G)$$

と定める. これは言葉で書くと「 x の元を動かさない G の元全体」である. 記号は似ているが $G \cdot x$ は X の部分集合であり, G_x は G の部分集合であることを注意しておく.

例 8. 写像

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \left(\theta, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \mapsto \theta \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos \theta)x - (\sin \theta)y \\ (\sin \theta)x + (\cos \theta)y \end{pmatrix}$$

は実平面 \mathbb{R}^2 上の加法群 \mathbb{R} の作用を定める. これが作用であることは次のように確かめられる.

(1) 任意の $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し,

$$0 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

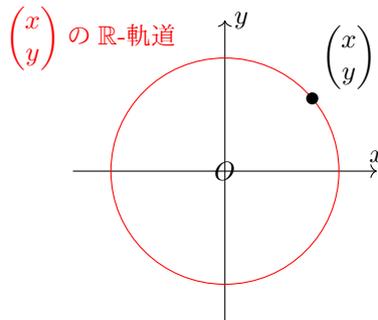
(2) 任意の $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し,

$$\begin{aligned} (\theta_1 + \theta_2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{三角関数の加法定理}) \\ &= \theta_1 \cdot \left(\theta_2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

このとき, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ の \mathbb{R} -軌道は,

$$\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} (\cos \theta)x - (\sin \theta)y \\ (\sin \theta)x + (\cos \theta)y \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

となる. これは, \mathbb{R}^2 を xy -平面として考えると, 原点を中心して $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を通る円として以下のように図示される.



これを念頭におくと固定部分群は以下のようになることがわかる.

• $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき,

$$\mathbb{R}_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \left\{ \theta \in \mathbb{R} \mid \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} = \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} = 2\pi\mathbb{Z}.$$

• $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき,

$$\mathbb{R}_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \mathbb{R}_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \left\{ \theta \in \mathbb{R} \mid \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}.$$

以下は軌道と固定部分群に関する以下の基本命題である.

命題 12.3

$G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto g \cdot x$ を集合 X 上の群 G の作用とする. このとき, 以下が成立する.

(1) 集合 X において,

$$x \sim y \iff \text{ある } g \in G \text{ が存在して, } x = g \cdot y$$

とすると, \sim は X 上の同値関係を定める. このとき, $x \in X$ の G -軌道 $G \cdot x$ は同値関係 \sim に関する x の同値類である.

(2) 各 $x \in X$ に対し, 固定部分群 G_x は G の部分群である.

証明.

(1) 関係 \sim が同値関係であれば, G 軌道 $G \cdot x$ が \sim に関する x の同値類であることは定義から明らかである. よって, \sim が同値関係であること, つまり, 反射律, 対称律, 推移律を満たすことをチェックすればよい.

(反射律) 任意の $x \in X$ に対して $x = e \cdot x$ なので (e は G の単位元), $x \sim x$ である.

(対称律) $x \sim y$ であるとき, ある $g \in G$ が存在して, $x = g \cdot y$. このとき

$$g^{-1} \cdot x = g^{-1} \cdot (g \cdot y) = (g^{-1}g) \cdot y = e \cdot y = y$$

となるので, $y \sim x$.

(推移律) $x \sim y$ かつ $y \sim z$ であるとき, ある $g_1, g_2 \in G$ が存在して, $x = g_1 \cdot y, y = g_2 \cdot z$. このとき,

$$x = g_1 \cdot y = g_1 \cdot (g_2 \cdot z) = (g_1g_2) \cdot z$$

となるので, $x \sim z$.

以上で \sim が X 上の同値関係であることが示された.

(2) まず, $e \cdot x = x$ なので, $e \in G_x$ であるから G_x は空ではない. 任意の $g_1, g_2 \in G_x$ に対し,

$$(g_1g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = g_1 \cdot x = x$$

となるので, $g_1g_2 \in G_x$. また, 任意の $g \in G_x$ に対し,

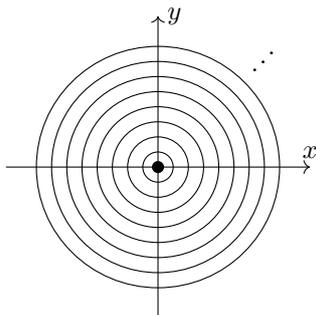
$$g^{-1} \cdot x = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1}g) \cdot x = e \cdot x = x.$$

となるので, $g^{-1} \in G_x$. 以上より, G_x は二項演算と逆元を取る操作について閉じている空でない集合なので, G の部分群である. \square

命題 11.5 (1) と同値関係の一般論 (第 8 回講義資料命題 7.3) より, X は互いに交わりのない G -軌道に分割されることがわかる. これを, X の軌道分解という.

例 9. 例 8 の例では, \mathbb{R} -軌道が円の形をしていた. つまり, 命題 12.3 (1) の同値関係は「原点からの距離が等しい点を同一視する」という同値関係になっていることがわかる. このとき, \mathbb{R}^2 の \mathbb{R} -軌道による軌道分解は \mathbb{R}^2 を原点を中心とする円の集まりによって (無限個に) 分解するようなものであることがわかる.

\mathbb{R}^2 の軌道分解 (実際には軌道は間隔を空けずに敷き詰められている) :



軌道と固定部分群は以下の軌道・固定群定理により関連付いている。これは雰囲氣的には準同型定理に似ているが、これはあくまで集合としての全単射写像 (定義域も終域も一般には群構造を持っていないただの集合) であるということに注意してほしい。

定理 12.4 (軌道・固定群定理 Orbit-stabilizer theorem)

$G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto g \cdot x$ を集合 X 上の群 G の作用とする。このとき、任意の $x \in X$ に対し、

$$f_x: G/G_x \rightarrow G \cdot x, gG_x \mapsto g \cdot x$$

は well-defined な全単射写像となる*2。これより、特に

$$(G : G_x) = |G \cdot x|$$

である。ただし、左辺は G_x の G における指数である (第 8 回講義資料定義 7.6 参照)。

証明. f_x の well-defined 性 :

$$g_1G_x = g_2G_x \text{ であるとき, } g_1 \cdot x = g_2 \cdot x$$

となることを示せばよい。 $g_1G_x = g_2G_x$ のとき、 $g_1 \stackrel{G_x}{\sim}_L g_2$ なので、ある $h \in G_x$ が存在して、 $g_1 = g_2h$ 。これより、

$$g_1 \cdot x = (g_2h) \cdot x = g_2 \cdot (h \cdot x) = g_2 \cdot x$$

となる。これより f_x は well-defined であることが示された。

f_x の全単射性 : 全射性は f_x の定義と G -軌道の定義から明らかである。単射性を示す。 $g_1G_x \neq g_2G_x$ とする。このとき、 $g_1^{-1}g_2 \notin G_x$ なので、

$$x \neq (g_1^{-1}g_2) \cdot x. \tag{12.1}$$

ここで、もし $g_1 \cdot x = g_2 \cdot x$ であると仮定すると、

$$\begin{aligned} g_1^{-1} \cdot (g_1 \cdot x) &= (g_1^{-1}g_1) \cdot x = e \cdot x = x \\ &\parallel \\ g_1^{-1} \cdot (g_2 \cdot x) &= (g_1^{-1}g_2) \cdot x \end{aligned}$$

となって、(12.1) に矛盾する。よって、このとき $g_1 \cdot x \neq g_2 \cdot x$ である。まとめると、 $g_1G_x \neq g_2G_x$ のとき、

$$f_x(g_1G_x) = g_1 \cdot x \neq g_2 \cdot x = f_x(g_2G_x).$$

となることが示されたので、 f_x は単射である。

*2 ここで、 $G \cdot x$ は X の部分集合で群ではなく、 G_x は一般には正規部分群では無いので G/G_x も一般には群構造を持たない単なる商集合であることに注意！このため、 f_x は群同型ではなく、単なる集合の間の全単射写像である。

$(G : G_x) = |G \cdot x|$: 指数の定義より, G/G_x の元の個数が $(G : G_x)$ である. よって, G/G_x と $G \cdot x$ の間に全単射写像が存在することから,

$$(G : G_x) = |G \cdot x|$$

である. □

以下は軌道・固定群定理とラグランジュの定理 (第 9 回講義資料定理 8.2) から直ちにわかる.

系 12.5

G を有限群とし, $G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto g \cdot x$ を集合 X 上の G の作用とする. このとき, 任意の $x \in X$ に対し,

$$|G \cdot x| = (G : G_x) = \frac{|G|}{|G_x|}$$

である. 特に各 G -軌道に含まれる元の個数は G の位数 $|G|$ の約数である.

例 10. 例 1 の作用

$$\mathfrak{S}_n \times X \rightarrow X, (\sigma, i) \mapsto \sigma \cdot i := \sigma(i)$$

を考える. このとき, 任意の $k \in X = \{1, 2, \dots, n\}$ に対し,

$$(1 \ k) \cdot 1 = k$$

となるので, 1 の \mathfrak{S}_n -軌道は

$$\mathfrak{S}_n \cdot 1 = \{\sigma \cdot 1 \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\} = \{1, 2, \dots, n\} = X$$

となる. つまり, このとき X は 1 つの \mathfrak{S}_n -軌道からなっている^{*3}. このとき, 軌道・固定群定理より,

$$f_1: \mathfrak{S}_n / (\mathfrak{S}_n)_1 \rightarrow X, \sigma(\mathfrak{S}_n)_1 \mapsto \sigma(1).$$

は well-defined な全単射写像である. さらに系 12.5 より,

$$\frac{|\mathfrak{S}_n|}{|(\mathfrak{S}_n)_1|} = (\mathfrak{S}_n : (\mathfrak{S}_n)_1) = |X| = n$$

であるので,

$$|(\mathfrak{S}_n)_1| = \frac{|\mathfrak{S}_n|}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

となり, 固定部分群 $(\mathfrak{S}_n)_1$ が位数 $(n-1)!$ の群であることがわかる. なお, より具体的には,

$$(\mathfrak{S}_n)_1 = \left\{ \sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma \cdot 1 = 1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \mid i_2, \dots, i_n \text{ は } 2, \dots, n \text{ の並べ替え} \right\}$$

となっており, 確かに $|(\mathfrak{S}_n)_1| = (n-1)!$ である.

例 11. 例 6 で考えた作用 ($n = 3$ の場合)

$$\mathfrak{S}_3 \times \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3] \rightarrow \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3],$$

$$\left(\sigma, \sum_{\ell_1, \ell_2, \ell_3 \geq 0} a_{\ell_1, \ell_2, \ell_3} x_1^{\ell_1} x_2^{\ell_2} x_3^{\ell_3} \right) \mapsto \sigma \cdot \left(\sum_{\ell_1, \ell_2, \ell_3 \geq 0} a_{\ell_1, \ell_2, \ell_3} x_1^{\ell_1} x_2^{\ell_2} x_3^{\ell_3} \right) = \sum_{\ell_1, \ell_2, \ell_3 \geq 0} a_{\ell_1, \ell_2, \ell_3} x_{\sigma(1)}^{\ell_1} x_{\sigma(2)}^{\ell_2} x_{\sigma(3)}^{\ell_3}$$

を考える. このとき, $1 + x_1 + x_2 x_3 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ の \mathfrak{S}_3 -軌道は,

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_3 \cdot (1 + x_1 + x_2 x_3) &= \{ \sigma \cdot (1 + x_1 + x_2 x_3) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_3 \} \\ &= \{ 1 + x_1 + x_2 x_3, 1 + x_2 + x_1 x_3, 1 + x_3 + x_1 x_2 \} \end{aligned}$$

^{*3} このように, 群 G が作用している集合 X が 1 つの軌道からなっている (=群作用によって, 集合内の任意の 2 元間を移動できる) とき, この作用は推移的 (transitive) であるという.

となる。すなわち、与えられた多項式 $f(x_1, x_2, x_3)$ の \mathfrak{S}_3 -軌道とは $f(x_1, x_2, x_3)$ の変数 x_1, x_2, x_3 の入れ替えによって得られる多項式全体である。軌道・固定群定理の系 12.5 より、 \mathfrak{S}_3 -軌道の元の個数は $|\mathfrak{S}_3| = 6$ の約数なので、与えられた多項式の変数を自由に入れ替えてできる多項式の個数は (もとの多項式も含め)、

$$1, 2, 3, 6$$

通りのいずれかであることがわかる ($1 + x_1 + x_2x_3$ の場合は上で見たように 3)。同じ議論で、一般に n 変数多項式が与えられたときにその変数を自由に入れ替えてできる多項式の個数は (もとの多項式も含め)、 $n!$ の約数となる。なお、上の例では、

$$(\mathfrak{S}_3)_{1+x_1+x_2x_3} = \{e, (2\ 3)\}$$

であることも容易に確かめられる (確かに系 12.5 の等式が成立していることに注意せよ)。

他の例も見てみる。 $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ の \mathfrak{S}_3 -軌道は、

$$\mathfrak{S}_3 \cdot (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = \{\sigma \cdot (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_3\} = \{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1\}$$

となり、

$$(\mathfrak{S}_3)_{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1} = \mathfrak{S}_3$$

である。一般に例 6 の作用において、

$$\mathfrak{S}_n \cdot f(x_1, \dots, x_n) = \{f(x_1, \dots, x_n)\} \Leftrightarrow (\mathfrak{S}_n)_{f(x_1, \dots, x_n)} = \mathfrak{S}_n$$

であり、これが成り立つとき、すなわちどのように変数を入れ替えても多項式が変化しないとき $f(x_1, \dots, x_n)$ を対称式 (**symmetric polynomial**) という。

もう一つ例を見よう。 $(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ の \mathfrak{S}_3 -軌道は、

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_3 \cdot ((x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)) &= \{\sigma \cdot ((x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_3\} \\ &= \{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3), -(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)\} \end{aligned}$$

となり、

$$(\mathfrak{S}_3)_{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)} = \{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} = \mathfrak{A}_3$$

である。一般に n 変数多項式の $f(x_1, \dots, x_n)$ うち任意の 2 つの変数を入れ替えると -1 倍されるような多項式を交代式 (**alternating polynomial**) という。 $(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$ は交代式である。例 6 の作用において、 $f(x_1, \dots, x_n)$ が交代式ならば、

- $\mathfrak{S}_n \cdot f(x_1, \dots, x_n) = \{f(x_1, \dots, x_n), -f(x_1, \dots, x_n)\}$
- $(\mathfrak{S}_n)_{f(x_1, \dots, x_n)} = \mathfrak{A}_n$

が成立する*4。

例 12. 例 8 で考えた作用

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \left(\theta, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \mapsto \theta \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos \theta)x - (\sin \theta)y \\ (\sin \theta)x + (\cos \theta)y \end{pmatrix}$$

を考える。

- $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき、 $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\pi\mathbb{Z}$ であつたので、軌道・固定群定理より、

$$f_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}: \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \theta + 2\pi\mathbb{Z} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

は well-defined な全単射写像である。

*4 実は「 $\mathfrak{S}_n \cdot f(x_1, \dots, x_n) = \{f(x_1, \dots, x_n), -f(x_1, \dots, x_n)\} \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n)$ は交代式」も成立する。理由を考えてみよ。
「 $(\mathfrak{S}_n)_{f(x_1, \dots, x_n)} = \mathfrak{A}_n \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n)$ は交代式」は成立しない。例えば、 $(\mathfrak{S}_3)_{1+(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)} = \mathfrak{A}_3$ となるが、 $1+(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)$ は交代式ではない。一般に、 $(\mathfrak{S}_n)_{f(x_1, \dots, x_n)} = \mathfrak{A}_n$ のとき、 $f(x_1, \dots, x_n)$ は (対称式)+(交代式) という形になっている。理由を考えてみよ。

- $\mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R}$ であったので,

$$\mathbb{R}/\mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R}/\mathbb{R} = \{0 + \mathbb{R}\} \text{ (} 0 + \mathbb{R} \text{ という 1 元のみからなる集合)}$$

である. 一方, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の \mathbb{R} -軌道は

$$\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

とやはり 1 元のみからなる集合となっている. よって, 確かに,

$$f_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}: \mathbb{R}/\mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 + \mathbb{R} \rightarrow 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

は well-defined な全単射写像である.

例 13. 例 4 で考えた作用

$$\psi': GL_n(\mathbb{C}) \times \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{C}), \quad (P, A) \mapsto PAP^{-1}$$

を考える ($\mathbb{R} = \mathbb{C}$ とした). 各 $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ のこの作用に関する軌道

$$\{PAP^{-1} \mid P \in GL_n(\mathbb{C})\}$$

の中に対角行列が含まれるとき, A を対角化可能というのであった (線形代数 II の内容の言い換え). 対角化とは, A の $GL_n(\mathbb{C})$ -軌道の中から対角行列を探してくるということを行っていたとも言える.