代数学 I 第 1 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

集合 X, Y をそれぞれ $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{a, b, c\}$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 全射でない写像 $f\colon X \to Y$ の例を 1 つ挙げよ．
(2) 全単射写像 $g\colon X \to Y$ の例を 1 つ挙げよ．
(3) 直積集合 $X \times X$ を全ての元を列挙する形で記述せよ．

(なお，これらは今回の講義内で扱った内容ではなく，これまでの講義内で扱ったはずのものである (数理科学科の場合，「数学基礎」，「線形代数 II」等)．各自復習して解答すること．)

問題 1 解答例.

(1) 写像 $f\colon X \to Y,\ 1 \mapsto a,\ 2 \mapsto a,\ 3 \mapsto b$.
(2) 写像 $g\colon X \to Y,\ 1 \mapsto b,\ 2 \mapsto c,\ 3 \mapsto a$.
(3) $X \times X = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$. □

問題 1 補足解説. (1) は $Y = \{a, b, c\} \neq \{f(1), f(2), f(3)\}$ となるように f が定義できていればそれでよい．(解答例では c が $f(1), f(2), f(3)$ のいずれとも異なる．) (2) は $g(1), g(2), g(3)$ が a, b, c の並べ替えを与えるように g を定義できていればそれでよい．(3) については集合の直積の定義を思い出しておこう．

集合の直積

集合 X, Y に対し，

$$X \times Y \coloneqq \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

である．これを X と Y の**直積**という．この $\times$ は数の掛け算ではないことに注意してほしい．X, Y が有限集合のとき，

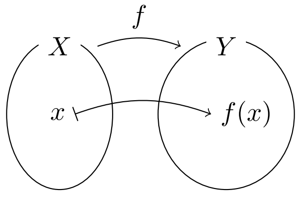
$$(X \times Y \text{ の元の個数}) = (X \text{ の元の個数}) \times (Y \text{ の元の個数})$$

となる (この右辺の $\times$ は普通の数の掛け算)．

本講義で学んでいくにあたって，写像に関する言葉を復習しておこう．集合 X, Y に対して，**写像** $f\colon X \to Y$ とは，X の各元 x に対して，集合 Y のある元 $f(x)$ を対応させる対応のことである．この写像を

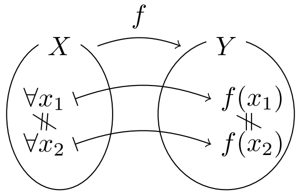
$$f\colon X \to Y,\ x \mapsto f(x)$$

というように表す．(例：$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$．このとき，例えば $f(1) = 1^2 = 1, f(2) = 2^2 = 2$．) 以下は写像のイメージ図である．

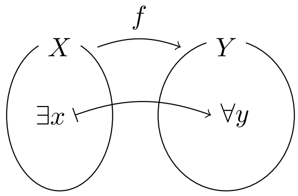


* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

写像 $f\colon X\to Y$ が**単射**であるとは，任意の $x_1\neq x_2$ なる $x_1,x_2\in X$ に対して，$f(x_1)\neq f(x_2)$ となることである．(上の例は，$1\neq -1$ に対し，$f(1)=1=(-1)^2=f(-1)$ なので単射ではない．)



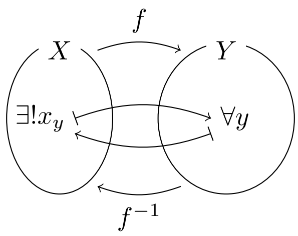
写像 $f\colon X\to Y$ が**全射**であるとは，任意の $y\in Y$ に対し，ある $x\in X$ が存在して，$f(x)=y$ となるということである．(上の例では，$-1\in\mathbb{R}$ に対して，$f(x)=x^2=-1$ となる $x\in\mathbb{R}$ は存在しないので，全射ではない．)



写像 $f\colon X\to Y$ が全射かつ単射であるとき，f は**全単射**であるという．このとき，各 $y\in Y$ に対し，$f(x_y)=y$ となる $x_y\in X$ が必ずただ 1 つだけ存在するので，y に対してこの x_y を対応させることで，写像

$$Y\to X,\ y\mapsto x_y$$

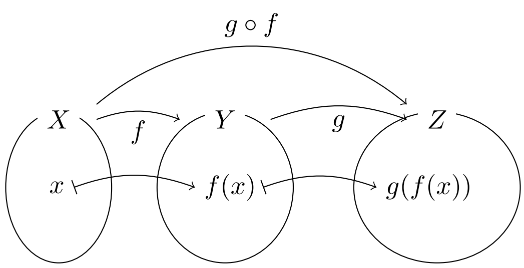
が得られる．これを f の**逆写像**といい，f^{-1} と書く．



写像 $f\colon X\to Y, g\colon Y\to Z$ に対し，写像の合成 $g\circ f\colon X\to Z$ とは，

$$(g\circ f)(x)=g(f(x)),\ x\in X$$

で定まる写像である．



$f\colon X\to Y$ が全単射のとき，

$$f^{-1}\circ f=\mathrm{id}_X \text{ かつ } f\circ f^{-1}=\mathrm{id}_Y$$

である．ここで，$\mathrm{id}_Z\colon Z\to Z$ は**恒等写像** $z\mapsto z$ $(Z=X,Y)$ である． □