代数学 I 第 2 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

一般線型群

$$GL_2(\mathbb{C}) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

を考える．次の部分集合 G_1, G_2, G_3 が，それぞれ $GL_2(\mathbb{C})$ の

(a) 部分群となる　　　　(b) 部分群とならない

のどちらになるかを選び，その<u>理由を説明</u>せよ．

(1) $G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}) \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad \neq 0, bc = 0 \right\}$.

(2) $G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta \in \mathbb{R} \right\}$.

(3) $G_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

問題 1 解答例.

<u>(1)</u> (b) 部分群とならない．

理由：部分群であるためには任意の $A, B \in G_1$ に対して，$AB \in G_1$ である必要がある．しかし，例えば $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in G_1$ に対し，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

となり，これは $1 \cdot 1 \neq 0$ より，G_1 の元ではない．□

<u>(2)</u> (a) 部分群となる．

理由：G_2 は定義より明らかに空ではない．任意の θ、$\theta' \in \mathbb{R}$ に対し、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' & -\cos\theta\sin\theta' - \sin\theta\cos\theta' \\ \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' & -\sin\theta\sin\theta' + \cos\theta\cos\theta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} \in G_2\end{aligned}$$

である (最後の等式は三角関数の加法定理より従う)．また，各 $\theta \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1, \quad \cos\theta = \cos(-\theta), \quad \sin\theta = -\sin(-\theta)$$

より，

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \in G_2$$

である．以上より，G_2 は $GL_2(\mathbb{C})$ の部分群である．□

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

(3) (a) 部分群となる．
理由：G_3 は定義より明らかに空ではない．

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^0$$

となる．これより，任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し，A^n は A^0, A, A^2, A^3 のいずれかに一致する．よって，

$$G_3 = \{A^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

となる．任意の $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ に対し，

$$A^{n_1}A^{n_2} = A^{n_1+n_2} \in G_3, \qquad (A^{n_1})^{-1} = A^{-n_1} \in G_3$$

となるので，G_3 は $GL_2(\mathbb{C})$ の部分群である． □

問題 1 補足解説． 第 1,2 回講義資料命題 1.5 より，群 G の部分集合 H が G の部分群であることの必要十分条件は，

『H が空でなく，任意の $h, k \in H$ に対し，$h \cdot k \in H$ かつ $h^{-1} \in H$ となること』

であった．このため，部分群であることを確かめるときはこの条件を確認すればよい．

G_1 は逆元を取る操作では閉じているが二項演算では閉じていない部分集合の例である．G_1 は正則な上三角行列全体のなす集合 B_+ と正則な下三角行列全体のなす集合 B_- の和集合 $B_+ \cup B_-$ であるが，B_+ や B_- 自体は $GL_2(\mathbb{C})$ の部分群となる．是非上の方法で確認してみてほしい．

(2) の G_2 は

$$G_2 = \left\{A \in GL_2(\mathbb{C}) \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{R}, {}^tAA = I_n, \det(A) = 1\right\}$$

と表すことができる (確かめてみよ)．この群は**回転群**や**特殊直交群 (special orthogonal group)** と呼ばれる．一般に，$n \in \mathbb{Z}_{>0}, \mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$(もっと一般には体) に対して，

$$O_n(\mathbb{K}) \coloneqq \{A \in GL_n(\mathbb{K}) \mid {}^tAA = I_n\}$$

とすると，これは一般線形群 $GL_n(\mathbb{K})$ の部分群となる (チェックせよ)．これを**直交群 (orthogonal group)** と呼ぶ．直交群の元を**直交行列**と呼ぶのであったことを思い出そう．直交行列 A の行列式は

$$\det(A)^2 = \det({}^tAA) = \det(I_n) = 1$$

となるので ± 1 であるが，このうち $+1$ の方をとって，

$$SO_n(\mathbb{K}) \coloneqq \{A \in GL_n(\mathbb{K}) \mid {}^tAA = I_n, \det A = 1\}$$

としたものは $GL_n(\mathbb{K})$ の部分群となる*1．これを特殊直交群と呼ぶ．この記号を使えば，$G_2 = SO_2(\mathbb{R})$ である．

(3) の G_3 が二項演算で閉じていることを調べるためには，$4 \times 4 = 16$ 通りの積を全て計算してももちろん良いが，解答例ではもう少しすっきりした解答を書いた．解答例の A は良く見ると

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix}$$

であり，

$$G_3 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(3\pi/2) & -\sin(3\pi/2) \\ \sin(3\pi/2) & \cos(3\pi/2) \end{pmatrix} \right\}$$

*1 $\det A = -1$ のものだけを集めたものは部分群ではない．例えば単位元 I_n が入っていない．

である．(2) の解答例での計算より，$n \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos(n\pi/2) & -\sin(n\pi/2) \\ \sin(n\pi/2) & \cos(n\pi/2) \end{pmatrix}$$

であるので，この見方に気づけば，解答例のような解答が思いつくのではないかと思われる．G_3 は G_2 の位数 4 の部分群であったのである． $\square$

<u>線形代数の復習 (本講義の範囲では証明無しに用いてよい)</u>

- (行列式 det と行列の積の関係)　n を正の整数とする．$n \times n$ 行列 A に対して，$\det(A)$ を A の行列式とする．このとき，$n \times n$ 行列 A, B に対し，

  $$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

  である．特に，$\det(A) \neq 0$ のとき，逆行列 A^{-1} が存在して，$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ である．

- (2×2 行列の逆行列の一般形) 行列式 $ad - bc$ が 0 でない 2×2 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し，その逆行列は

  $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

  である．

- 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ に対し，(i, j) 成分を a_{ji} としたものを，

  $${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

  と書き，A の転置行列という．$\ell \times m$ 行列 A，$m \times n$ 行列 B に対し，

  $${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$$

  となる．また，正則 $n \times n$ 行列 A に対し，${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$ である．