

代数学 I 第 6 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

4 次二面体群

$$D_4 = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \sigma^3\tau\}$$

の部分群を全て求めよ (答えのみで良い)。ここで、 σ, τ は講義資料 5.2 節のものを指すこととする。

問題 1 解答例.

$\{e\}, \{e, \sigma^2\}, \{e, \tau\}, \{e, \sigma\tau\}, \{e, \sigma^2\tau\}, \{e, \sigma^3\tau\}, \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\}, \{e, \sigma^2, \tau, \sigma^2\tau\}, \{e, \sigma^2, \sigma\tau, \sigma^3\tau\}, D_4$. □

問題 1 補足解説. D_4 の部分群は空でない D_4 の部分集合で、二項演算と逆元をとる操作で閉じているものであった (第 1,2 回講義資料命題 1.5). 第 5 回本レポート課題解答問題 1 の補足解説で考えたように、後は D_4 の部分集合の中からこの条件を満たすものをひたすら探せば良い。ここで、二面体群における二項演算の計算においては以下の公式さえ覚えておけば良かったということを思い出そう。(対称群の元としての表示は覚える必要無し!)

二面体群における計算公式

講義資料 5.2 節の記号を用いる。 $\sigma, \tau \in D_n$ について以下が成立する。

- (1) $\sigma^n = e$.
- (2) $\tau^2 = e$. すなわち、 $\tau^{-1} = \tau$.
- (3) $\tau\sigma = \sigma^{-1}\tau$, $\tau\sigma^{-1} = \sigma\tau$. 一般に $k \in \mathbb{Z}$ に対し、 $\tau\sigma^k = \sigma^{-k}\tau$.

部分群を探す際には、以下のことに注意すると少しはやく見つけることができる。

- (i) 部分群は必ず D_4 の単位元 e を含むので、 e を含まない部分集合は考えなくてよい。
- (ii) 部分群は二項演算で閉じているので、 σ を含むのであれば、 σ^2, σ^3 も自動的に含むことになる。同様に、 σ^3 を含むのであれば、 $(\sigma^3)^2 = \sigma^6 = \sigma^2$, $(\sigma^3)^3 = \sigma^9 = \sigma$ を自動的に含むことになる。
- (iii) 部分群は二項演算で閉じているので、 $\sigma^k\tau, \sigma^\ell\tau$ を含むのであれば、

$$\sigma^k\tau\sigma^\ell\tau = \sigma^k\sigma^{-\ell}\tau\tau = \sigma^{k-\ell}$$

も自動的に含むことになる。

これより、例えば部分群が H が $\sigma\tau, \sigma^2\tau$ を含んでいれば、

- (iii) より、 $\sigma^{2-1} = \sigma^{-1} = \sigma^3 \in H$.
- このとき (ii) より、 $\sigma, \sigma^2 \in H$.
- さらにこのとき、 $\sigma^{-1}\sigma\tau = \tau \in H, \sigma^2\sigma\tau = \sigma^3\tau \in H$.
- 以上より、 $H = D_4$.

というような議論ができる。つまり、 D_4 以外の場合は $\sigma\tau, \sigma^2\tau$ のどちらかしか含んでいないことがわかる。

なお、第 5 回本レポート課題解答問題 1 の補足解説に述べた注意と同様であるが、この先の講義で群論をもう少し学ぶと、本問はもっと楽に解けるようになる。今後扱うラグランジュの定理により、「部分群の位数は

* e-mail: hoya@shibaura-it.ac.jp

もとの群の位数の約数になるしかない」ということがわかるので、自明でない部分群の位数は2か4であることがわかり、元の個数が3,5,6,7の部分集合は初めから考えなくてよいということになるのである。□

問題 2

(1) n, k を2以上の自然数とする。任意の巡回置換 $(i_1 i_2 \cdots i_k) \in \mathfrak{S}_n$ に対し、

$$\operatorname{sgn}(i_1 i_2 \cdots i_k) = (-1)^{k-1}$$

となることを示せ。

(Hint : 難しい場合はまず、 $(i_1 i_2 \cdots i_k) = (1 2 \cdots k)$ の場合を考え、一般の場合はそれをヒントに考えよ。)

(2) \mathfrak{S}_{20} において、

$$\operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 5 & 4 & 16 & 6 & 17 & 3 & 8 & 2 & 1 & 20 & 12 & 19 & 18 & 9 & 15 & 7 & 14 & 13 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

の値を求めよ (答えのみで良い)。

問題 2 解答例.

(1) 各 $1, \dots, n$ の像を考えることで、写像として

$$(i_1 i_2 \cdots i_k) = (i_1 i_2)(i_2 i_3) \cdots (i_{k-1} i_k)$$

となることがわかる。よって、

$$\operatorname{sgn}(i_1 i_2 \cdots i_k) = \operatorname{sgn}((i_1 i_2)(i_2 i_3) \cdots (i_{k-1} i_k)) = \operatorname{sgn}(i_1 i_2) \operatorname{sgn}(i_2 i_3) \cdots \operatorname{sgn}(i_{k-1} i_k) = (-1)^{k-1}$$

である。

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 5 & 4 & 16 & 6 & 17 & 3 & 8 & 2 & 1 & 20 & 12 & 19 & 18 & 9 & 15 & 7 & 14 & 13 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

をどの2つも互いに素な巡回置換の合成で表すと、

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 5 & 4 & 16 & 6 & 17 & 3 & 8 & 2 & 1 & 20 & 12 & 19 & 18 & 9 & 15 & 7 & 14 & 13 & 11 & 10 \end{pmatrix} \\ &= (1 5 17 14 9)(2 4 6 3 16 7 8)(10 20)(11 12 19)(13 18) \end{aligned}$$

となる。よって、(1)の計算より、求める値は、

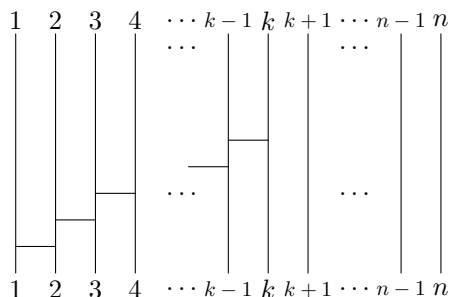
$$\begin{aligned} & \operatorname{sgn}((1 5 17 14 9)(2 4 6 3 16 7 8)(10 20)(11 12 19)(13 18)) \\ &= \operatorname{sgn}(1 5 17 14 9) \operatorname{sgn}(2 4 6 3 16 7 8) \operatorname{sgn}(10 20) \operatorname{sgn}(11 12 19) \operatorname{sgn}(13 18) \\ &= (-1)^4 (-1)^6 (-1) (-1)^2 (-1) = 1. \end{aligned}$$

(本問の解答としては1という答えのみ書かれていれば良い。)

□

問題 2 補足解説. 本問は講義資料定理 5.4 を用いて符号を計算する問題であった。(1)の解答例に書いた $(i_1 i_2 \cdots i_k)$ の互換による分解はすぐには思いつかなかった方もいるかもしれない。しかし、 $(1 2 3 \cdots k)$ であれば、あみだくじを考えることで思いつきやすかったのではないかと思う。 $(1 2 3 \cdots k)$ は以下のあみだ

くじに対応する.



これより, 隣接互換とあみだくじの横棒の対応, および対称群における二項演算とあみだくじの連結の関係 (第5回講義資料 4.2 節) を思い出すと,

$$(1\ 2\ \cdots\ k) = (1\ 2)(2\ 3)\cdots(k-1\ k)$$

となることがわかる. これをもとに (1) を解答することもできる. 第5回本レポート課題問題 2 (1) で示した事実より,

$$\sigma(\ell) = i_\ell, \ell = 1, \dots, k$$

を満たす $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ を取れば (このようなものは必ず存在する. 理由を考えよ.),

$$\sigma(1\ 2\ \cdots\ k)\sigma^{-1} = (\sigma(1)\ \sigma(2)\ \cdots\ \sigma(k)) = (i_1\ i_2\ \cdots\ i_k)$$

となる. よって,

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(i_1\ i_2\ \cdots\ i_k) &= \operatorname{sgn}(\sigma(1\ 2\ \cdots\ k)\sigma^{-1}) \\ &= \operatorname{sgn}\sigma \operatorname{sgn}(1\ 2\ \cdots\ k) \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) \\ &= \operatorname{sgn}\sigma \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) \operatorname{sgn}((1\ 2)(2\ 3)\cdots(k-1\ k)) \\ &= \operatorname{sgn}(\sigma\sigma^{-1}) \operatorname{sgn}((1\ 2)(2\ 3)\cdots(k-1\ k)) \\ &= \operatorname{sgn}(e) \operatorname{sgn}(1\ 2) \operatorname{sgn}(2\ 3)\cdots\operatorname{sgn}(k-1\ k) \\ &= 1 \cdot (-1)^{k-1} = (-1)^{k-1} \end{aligned}$$

となる. なお, 同様の計算により, 一般に任意の $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$ に対し,

$$\operatorname{sgn}(\sigma\sigma'\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma')$$

である.

(2) は定義通り転倒数を求めて符号を求めても良いが, 元が大きくて大変なので, 講義資料定理 5.4 と (1) を用いる計算を行った (なお転倒数は 82 である.). この方法は是非覚えておいてほしい. 対称群の元をどの 2 つも互いに素な巡回置換の合成として書く方法については第5回講義資料の定理 4.7 のところを参照すること. □