代数学 I 第 7 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

10 次対称群 $\mathfrak{S}_{10}$ の元

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 7 & 5 & 10 & 9 & 4 & 6 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

の位数は $\boxed{ア}$ である．$\boxed{ア}$ に入る自然数を半角数字で入力せよ．なお，自然数なので 2 桁以上の数もあり得ることに注意せよ．

問題 1 解答例. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 7 & 5 & 10 & 9 & 4 & 6 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ をどの 2 つも互いに素な巡回置換の合成として表すと，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 7 & 5 & 10 & 9 & 4 & 6 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 8)(2\ 7\ 6\ 4\ 10)(3\ 5\ 9)$$

である．このとき，互いに素な巡回置換の可換性より，各 $m \in \mathbb{Z}$ に対し，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 7 & 5 & 10 & 9 & 4 & 6 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^m = (1\ 8)^m(2\ 7\ 6\ 4\ 10)^m(3\ 5\ 9)^m$$

が成立する．$(1\ 8)^m(2\ 7\ 6\ 4\ 10)^m(3\ 5\ 9)^m = e$ となる最小の正の整数が求める位数であるが，それはそれぞれの巡回置換の長さ $2, 5, 3$ の最小公倍数であるので，

$$\operatorname{ord}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 7 & 5 & 10 & 9 & 4 & 6 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 30$$

である． □

問題 1 補足解説. 群 G の元 g の位数は，$g^m = e$ となる最小の正の整数 m に等しい (第 7 回講義資料命題 6.8)．よって，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 7 & 5 & 10 & 9 & 4 & 6 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ を何度も合成していって，単位元に戻るのはいつかを計算すればこの元の位数が求められる．しかし，そのままの形で計算していくのはやや大変である．そこで解答例では，この元をどの 2 つも互いに素な巡回置換の合成で表示して，計算を楽にする工夫をした (この表示については第 5 回講義資料定理 4.7 の後の解説を参照のこと)．このようにして対称群の元の位数を求める方法は第 7 回講義資料例 4 で解説されているので復習しておいてほしい．定理の形でもまとめておこう．

定理

n 次対称群の元 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ がどの 2 つも互いに素な巡回置換 $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ を用いて，

$$\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_s$$

と書けていたとする．このとき各 σ_k の長さを ℓ_k と書くと (つまり $\#S(\sigma_k) = \ell_k$)，

$$\operatorname{ord}\sigma = (\ell_1, \dots, \ell_s \text{の最小公倍数})$$

である．

□

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

問題 2

7 次対称群 $\mathfrak{S}_7$ の元 σ で位数が 10 のものを 1 つ挙げよ．ただし，σ はどの 2 つも互いに素な巡回置換の合成で表すこと．

問題 2 解答例. $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)(6\ 7)$ □

問題 2 補足解説. 問題 1 補足解説で述べた定理より，対称群の位数 10 の元は，それをどの 2 つも互いに素な巡回置換の合成で表したとき，そこに現れる巡回置換の長さの最小公倍数が 10 となる元である．7 次対称群においてそのような元は互いに素な長さ 5 の巡回置換と長さ 2 の巡回置換の合成で書かれるもののみなので，解答例のような元がその一例となる．長さ 5 の巡回置換と長さ 2 の巡回置換の合成で書かれていて，しかもそれらが互いに素であれば何でも良い ($(1\ 2)(3\ 4\ 5\ 6\ 7), (1\ 3\ 5\ 7\ 2)(4\ 6), (1\ 7\ 2\ 6\ 3)(4\ 5)$ 等). □

問題 3

4 次対称群 $\mathfrak{S}_4$ における $\{(1\ 2\ 3\ 4), (2\ 4)\}$ の中心化群

$$Z(\{(1\ 2\ 3\ 4), (2\ 4)\})$$

に以下の元が含まれるかどうかを判定せよ．

(1) $(4\ 3\ 2\ 1)$.
(2) $(1\ 3)(2\ 4)$.

問題 3 解答例. (1) 含まれない．　(2) 含まれる． □

問題 3 補足解説. 中心化群の定義より，

$$\sigma \in Z(\{(1\ 2\ 3\ 4), (2\ 4)\}) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma(1\ 2\ 3\ 4) = (1\ 2\ 3\ 4)\sigma \text{ かつ } \sigma(2\ 4) = (2\ 4)\sigma$$

なので，この右辺の条件を確かめれば良い．しかしここではさらに進んで右辺の条件を次のように変形してみる (これ以降は対称群特有の議論を含むことに注意).

$$\begin{aligned}
&\sigma(1\ 2\ 3\ 4) = (1\ 2\ 3\ 4)\sigma \text{ かつ } \sigma(2\ 4) = (2\ 4)\sigma \\
&\Leftrightarrow \quad \sigma(1\ 2\ 3\ 4)\sigma^{-1} = (1\ 2\ 3\ 4) \text{ かつ } \sigma(2\ 4)\sigma^{-1} = (2\ 4) \\
&\Leftrightarrow \quad (\sigma(1)\ \sigma(2)\ \sigma(3)\ \sigma(4)) = (1\ 2\ 3\ 4) \text{ かつ } (\sigma(2)\ \sigma(4)) = (2\ 4)
\end{aligned}$$

ここで，最後の同値は第 5 回本レポート課題問題 2 での計算よりわかる．この最後の条件を確かめる．

$\sigma = (4\ 3\ 2\ 1)$ とすると，

$$(\sigma(1)\ \sigma(2)\ \sigma(3)\ \sigma(4)) = (4\ 1\ 2\ 3) = (1\ 2\ 3\ 4), \quad (\sigma(2)\ \sigma(4)) = (1\ 3) \neq (2\ 4)$$

より，$\sigma \notin Z(\{(1\ 2\ 3\ 4), (2\ 4)\})$ である．

$\sigma = (1\ 3)(2\ 4)$ とすると，

$$(\sigma(1)\ \sigma(2)\ \sigma(3)\ \sigma(4)) = (3\ 4\ 1\ 2) = (1\ 2\ 3\ 4), \quad (\sigma(2)\ \sigma(4)) = (4\ 2) = (2\ 4)$$

より，$\sigma \in Z(\{(1\ 2\ 3\ 4), (2\ 4)\})$ である．

ちなみに，この調子で計算してみると，

$$Z(\{(1\ 2\ 3\ 4), (2\ 4)\}) = \{e, (1\ 3)(2\ 4)\}$$

であることがわかる (つまり $(1\ 3)(2\ 4)$ が $Z(\{(1\ 2\ 3\ 4), (2\ 4)\})$ に含まれる単位元以外の唯一の元). □