代数学 I 第 8 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

記号の準備

4 次対称群 $\mathfrak{S}_4$ の元に以下のようにアルファベットを割り当てる．

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}$$
$$D=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}\quad F=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$$
$$G=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}\quad H=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\quad I=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$$
$$J=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\quad K=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}\quad L=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$$
$$M=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}\quad N=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}\quad O=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}$$
$$P=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}\quad Q=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\quad R=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$$
$$S=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}\quad T=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}\quad U=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}$$
$$V=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}\quad W=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}\quad X=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$

問題 1

$\mathfrak{S}_4$ の部分群

$$H_1=\left\langle\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}\right\rangle$$

を考える．このとき，$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}$ の H_1 による左剰余類

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}H_1$$

に含まれる元を冒頭で定義した記号を用いて全て挙げよ．

問題 1 解答例.

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}^3=(1\ 2\ 3)^3=e$$

であることに注意すると，

$$\begin{aligned}H_1&=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}^2\right\}\\&=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}\right\}\end{aligned}$$

* *e-mail*: hoya@shibaura-it.ac.jp

である．これより，

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}H_1\\
&=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}\right\}\\
&=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}\right\}=\{E,H,U\}.
\end{aligned}
$$

□

問題 2

問題 1 の H_1 の $\mathfrak{S}_4$ における指数 $(\mathfrak{S}_4 : H_1)$ は $\boxed{ア}$ である．$\boxed{ア}$ に入る自然数を半角数字で入力せよ．なお，自然数なので 2 桁以上の数もあり得ることに注意せよ．

問題 2 解答例． $\mathfrak{S}_4$ を H_1 による左剰余類で分割したときに現れる左剰余類の個数が $(\mathfrak{S}_4 : H_1)$ である．左剰余類の計算は問題 1 の方法で計算すれば良い．地道に計算すると，以下のようになる．

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}H_1=\{A,I,M\}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}H_1=\{C,G,O\}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}H_1=\{E,H,U\}\left(=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}H_1\right)$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}H_1=\{J,R,V\}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}H_1=\{B,K,S\}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}H_1=\{D,Q,T\}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}H_1=\{F,N,W\}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}H_1=\{L,P,X\}$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{S}_4=&\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}H_1\cup\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}H_1\cup\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}H_1\cup\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}H_1\cup\\
&\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}H_1\cup\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}H_1\cup\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}H_1\cup\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}H_1
\end{aligned}
$$

よって，$(\mathfrak{S}_4 : H_1) = 8$. □

問題 2 補足解説． 本問は解答例のように地道に計算してもらえば良いが，計算していると全ての剰余類は 3 つの元からなるということに気付かれるだろう．この 3 は H_1 の位数に他ならない．実はこの事実は常に成立する．つまり以下が成り立つ．

命題

G を群とし，H を G の部分群とする．このとき，任意の $g \in G$ に対し，$|gH| = |Hg| = |H|$.

この命題は第 9 回講義で証明を行う．これを用いれば，$\mathfrak{S}_4$ を H_1 による左剰余類で分割したときに現れる左剰余類の個数は

$$|\mathfrak{S}_4| \div |H_1| = 24 \div 3 = 8$$

と計算できるはずである．実際この計算は正しく，これは第 9 回講義で学ぶラグランジュの定理に他ならない．本問のような問題はラグランジュの定理を知っていれば実は簡単に解ける問題なのである (第 9 回講義をお楽しみに！). □

問題 3

$\mathfrak{S}_4$ の部分群

$$H_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

を考える．このとき，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ の H_2 による右剰余類

$$H_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

に含まれる元を冒頭で定義した記号を用いて全て挙げよ．

問題 3 解答例.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}^4 = (1\ 2\ 3\ 4)^4 = e$$

であることに注意すると，

$$H_2 = \left\{ e, (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 3\ 4)^2, (1\ 2\ 3\ 4)^3 \right\}$$

である．これより，

$$\begin{aligned} &H_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \left\{ e \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, (1\ 2\ 3\ 4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, (1\ 2\ 3\ 4)^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, (1\ 2\ 3\ 4)^3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\} = \{D, K, M, V\}. \end{aligned}$$

□

問題 4

問題 3 の H_2 に関する $\mathfrak{S}_4$ の右完全代表系を冒頭で定義した記号を用いて一つ挙げよ．

問題 4 解答例. $\mathfrak{S}_4$ を H_2 による右剰余類で分割し，その後各右剰余類から 1 つずつ元を取ってくれば良い．右剰余類の計算は問題 3 の方法で計算すれば良い．地道に計算すると，以下のようになる．

$$\begin{aligned} &H_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \{A, J, Q, S\} && H_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \{B, I, R, T\} \\ &H_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \{C, L, N, U\} && H_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \{D, K, M, V\} \left(= H_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\right) \\ &H_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \{E, G, P, W\} && H_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \{F, H, O, X\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_4 = &H_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cup H_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cup H_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cup \\ &H_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cup H_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cup H_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって，右完全代表系の一例としては $\{A, B, C, D, E, F\}$ が挙げられる． □

問題 4 補足解説. 本問も右完全代表系の定義にしたがって計算すれば良い．解答例に挙げた各右剰余類から一つずつ元を選択できていれば全て正解である．

なお，解答例では $\{A, B, C, D, E, F\}$ という "綺麗な" 右完全代表系が選択できたがこの理由については次のように考えることもできる．

ラグランジュの定理を用いた別解： 問題 2 補足解説に述べた命題より，$\mathfrak{S}_4$ は $|\mathfrak{S}_4| \div |H_2| = 24 \div 4 = 6$ つの H_2 による右剰余類に分割される (ラグランジュの定理)．これより，右完全代表系は 6 つの元からなる集合である．ここで，

$$R \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & i & j & k \end{pmatrix} \;\middle|\; i, j, k \text{ は } 2, 3, 4 \text{ の並べ替え} \right\}$$

という集合を考えると，これは 6 つの元からなるが，H_2 の単位元以外の元はいずれも 1 を 1 以外の数に移す写像なので，R の任意の 2 元は互いに H_2 に関して右合同ではない．つまり，$(i, j, k) \neq (i', j', k')$ のとき，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & i & j & k \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3\ 4)^k \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & i' & j' & k' \end{pmatrix}$$

を満たす $k = 0, 1, 2, 3$ は存在しない．よって，R に含まれる 6 元は互いに異なる右剰余類に属する．以上より，R が右完全代表系を与えることがわかる． □

この別解と同様に考えると，

$$R' \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & 2 & j & k \end{pmatrix} \;\middle|\; i, j, k \text{ は } 1, 3, 4 \text{ の並べ替え} \right\}$$
$$R'' \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & j & 3 & k \end{pmatrix} \;\middle|\; i, j, k \text{ は } 1, 2, 4 \text{ の並べ替え} \right\}$$
$$R''' \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & j & k & 4 \end{pmatrix} \;\middle|\; i, j, k \text{ は } 1, 2, 3 \text{ の並べ替え} \right\}$$

等も H_2 に関する $\mathfrak{S}_4$ の右完全代表系であることがわかる． □