代数学 I 第 10 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

一般線型群

$$GL_2(\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{C}, \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \neq 0 \right\}$$

を考える．次の部分集合 G_1, G_2, G_3 が，それぞれ $GL_2(\mathbb{C})$ の

(a) 正規部分群となる　　(b) 部分群となるが正規部分群ではない　　(c) 部分群とならない

のどれになるかを選び，その理由を説明せよ．

(1) $G_1 = \{A \in GL_2(\mathbb{C}) \mid |\det(A)| = 1\}$ ($|\det(A)|$ は A の行列式 $\det(A) \in \mathbb{C}^\times$ の絶対値)
(2) $G_2 = \{A \in GL_2(\mathbb{C}) \mid |\det(A)| \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$
(3) $G_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{C} \right\}$

問題 1 解答例.

(1) (a) 正規部分群となる．

理由：$\left|\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 1$ より，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_1$ より，G_1 は空ではない．任意の $A, B \in G_1$ に対し，

$$|\det(AB)| = |\det(A)\det(B)| = |\det(A)||\det(B)| = 1 \cdot 1 = 1$$
$$|\det(A^{-1})| = \left|\frac{1}{\det(A)}\right| = \frac{1}{|\det(A)|} = \frac{1}{1} = 1$$

より，$AB \in G_1$ かつ $A^{-1} \in G_1$ である．よって，G_1 は $GL_2(\mathbb{C})$ の部分群である．

さらに，任意の $C \in GL_2(\mathbb{C})$，$A \in G_1$ に対し，

$$\begin{aligned} |\det(CAC^{-1})| &= |\det(C)\det(A)\det(C^{-1})| \\ &= |\det(C)||\det(A)||\det(C^{-1})| \\ &= |\det(C)||\det(C^{-1})| = |\det(C)\det(C^{-1})| = |\det(CC^{-1})| = |\det(I_n)| = 1 \end{aligned}$$

なので，$CAC^{-1} \in G_1$ である．よって，G_1 は $GL_2(\mathbb{C})$ の正規部分群となる．□

(2) (c) 部分群とならない．

理由：G_2 が $GL_2(\mathbb{C})$ の部分群であるためには，任意の G_2 の元に対して，その逆元 (=逆行列) も再び G_2 の元である必要がある．しかし，例えば

$$\left|\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

より，$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_2$ であるが，その逆行列 $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は

$$\left|\det \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2} \times 1 - 0 \times 0\right| = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

* *e-mail*: hoya@shibaura-it.ac.jp

より，G_2 の元でない．よって，G_2 は $GL_2(\mathbb{C})$ の部分群ではない． □

(3) (b) 部分群となるが正規部分群ではない．

理由：G_3 は定義より明らかに空ではない．また，各 $t, t' \in \mathbb{C}$ に対し，

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & t'\\ 0 & 1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & t+t'\\ 0 & 1\end{pmatrix} \in G_3\\
\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} &= \frac{1}{1\cdot 1 - t\cdot 0}\begin{pmatrix}1 & -t\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -t\\ 0 & 1\end{pmatrix} \in G_3
\end{aligned}$$

である．これらより，G_3 は $GL_2(\mathbb{C})$ の部分群である．

一方，例えば $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$, $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \in G_3$ に対し，

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

となり，これは G_3 の元ではない．よって，G_3 は $GL_2(\mathbb{C})$ の正規部分群とはならない． □

問題 1 補足解説. 第 1,2 回講義資料命題 1.5 より，群 G の部分集合 H が G の部分群であることを証明するためには，

$$H \text{ が空でなく，任意の } h, k \in H \text{ に対し，} hk \in H \text{ かつ } h^{-1} \in H \text{ となること}$$

を示せば良かった．次に，第 10 回講義資料命題 9.3 より，群 G の部分群 H が G の正規部分群であることを証明するためには，

$$\text{任意の } g \in G \text{ と } h \in H \text{ に対して，} ghg^{-1} \in H \text{ となること}$$

を示せば良かった．本問はこれらの条件を順にチェックする問題となっている．部分集合 G_2 は行列の積 (二項演算) では閉じているので，逆元をとる操作で閉じていないことを指摘することになる． □