代数学 I 第 11 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

以下の 2 つの群が同型であるかどうかを判定せよ．

- 4 を法とする整数の剰余類群 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
- 乗法群 $\mathbb{C}^\times$ の部分群 $\{1, i, -1, -i\}$

問題 1 解答例． 同型である． □

問題 1 補足解説． $G = \{1, i, -1, -i\}$ と書く．このとき，$G = \{i^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \langle i \rangle$ であることに注意し，写像 $\phi\colon \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to G$ を

$$[n]_4 \mapsto i^n$$

と定義する．これが well-defined であることは以下のように確認される．$[n]_4 = [n']_4$ とすると，ある $k \in \mathbb{Z}$ が存在して，$n = n' + 4k$ となるので，このとき

$$i^n = i^{n'+4k} = i^{n'}(i^4)^k = i^{n'}1^k = i^{n'}.$$

よって，ϕ は well-defined である．このとき，

$$\phi([0]_4) = 1 \qquad \phi([1]_4) = i \qquad \phi([2]_4) = -1 \qquad \phi([3]_4) = -i$$

となるので ϕ は全単射写像であり，$n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$\phi([n_1]_4 + [n_2]_4) = \phi([n_1 + n_2]_4) = i^{n_1+n_2} = i^{n_1}i^{n_2} = \phi([n_1]_4)\phi([n_2]_4)$$

となるので ϕ は群準同型でもある．よって，ϕ は群同型となるので，$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \simeq G$ である．

上のような同型写像は $\mathrm{ord}[1]_4 = 4 = \mathrm{ord}\, i$ であることに気づけば見つけることができるだろう．なお，一般に位数 n の巡回群は全て $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に同型となるということを次回証明する． □

問題 2

以下の 2 つの群が同型であるかどうかを判定せよ．

- 加法群 $\mathbb{Z}$
- 一般線型群 $GL_2(\mathbb{R})$ の部分群 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, n \in \mathbb{Z} \right\}$

問題 2 解答例． 同型である． □

問題 2 補足解説． $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, n \in \mathbb{Z} \right\}$ と書く．このとき，写像 $\phi\colon \mathbb{Z} \to G$ を

$$n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* *e-mail*：`hoya@shibaura-it.ac.jp`

と定義する．このとき，定義より ϕ は明らかに全単射写像であり，$n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$\phi(n_1+n_2) = \begin{pmatrix} 1 & n_1+n_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \phi(n_1)\phi(n_2)$$

となるので ϕ は群準同型でもある．よって，ϕ は群同型となるので，$\mathbb{Z} \simeq G$ である．

上のような同型写像は G の群構造の確認として $\begin{pmatrix} 1 & n_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を試しに計算してみればその結果が $\begin{pmatrix} 1 & n_1+n_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となることから，結局 $\mathbb{Z}$ と同様の計算規則であることがわかって，思いつくことができるだろう． □

問題 3

以下の 2 つの群が同型であるかどうかを判定せよ．

- クラインの 4 元群 V (第 10 回講義資料例 4 参照)
- 一般線型群 $GL_2(\mathbb{R})$ の部分群

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

問題 3 解答例． 同型でない． □

問題 3 補足解説． クラインの 4 元群 V は第 10 解講義資料例 4 で見たように巡回群ではない．一方，$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ は第 2 回本レポート課題問題 1 (3) の解答例で見たように巡回群である．より明示的には，

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である．以上より，これらの群は同型ではない．(巡回群と同型な群は必ず巡回群となる．定義に従って厳密に確かめてみよ．) □

問題 4

以下の議論が「加法群 $\mathbb{Q}$ と正の有理数全体のなす乗法群 $\mathbb{Q}_{>0}$ が同型でないこと」の証明として正しいかどうかを判定せよ．

『$\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0},\ x \mapsto e^x$ は群としての同型を与える．しかし，この定義域を $\mathbb{Q}$ に制限しても，その像 $\exp(\mathbb{Q})$ は $\mathbb{Q}_{>0}$ には含まれない．(例えば，$\exp(1) = e \notin \mathbb{Q}_{>0}$．) よって，exp は $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_{>0}$ という全単射群準同型を与えないので，$\mathbb{Q}$ と $\mathbb{Q}_{>0}$ は同型ではない．』

問題 4 解答例． 正しくない． □

問題 4 補足解説． ここに書いた説明は $\mathbb{Q}$ と $\mathbb{Q}_{>0}$ が同型でないことの証明にはなっていない．一般に群 G_1 と G_2 が同型でないということを示すためには「どう頑張っても群同型 $\phi\colon G_1 \to G_2$ が構成できない」ということを示す必要がある．本問の説明に書かれているように「何か同型になりそうな写像を 1 つ考えようとしてみたけれどやっぱりダメだった」というだけでは同型でないことの証明にはなっていないのである．これに対して，先に書くと問題 5 の説明は正しい証明となっている．ここの違いはきちんと認識できるようになってもらいたい． □

問題 5

以下の議論が「加法群 $\mathbb{Q}$ と正の有理数全体のなす乗法群 $\mathbb{Q}_{>0}$ が同型でないこと」の証明として正しいかどうかを判定せよ．

『全単射群準同型 $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_{>0}$ が存在したと仮定する．このとき，$f(a) = 2$ となる $a \in \mathbb{Q}$ が必ず存在する．すると，

$$2 = f(a) = f(a/2 + a/2) = f(a/2)^2$$

となるので，$f(a/2)$ は $f(a/2)^2 = 2$ を満たす正の有理数となるが，そのような有理数は存在しないので矛盾する．よって，全単射群準同型 $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_{>0}$ は存在せず，$\mathbb{Q}$ と $\mathbb{Q}_{>0}$ は同型ではない．』

問題 5 解答例. 正しい． □

問題 5 補足解説. これは問題 4 とは違って正しい証明になっている．$f(a) = 2$ となる $a \in \mathbb{Q}$ が必ず存在するのは f の全射性のためである．$\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}_{>0}$ は同型だが，$\mathbb{Q}$ と $\mathbb{Q}_{>0}$ は同型ではないというのは $\mathbb{R}$ と $\mathbb{Q}$ の違いが良く表れている面白い例である． □