代数学 I 第 13 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

記号の準備

4 次対称群 $\mathfrak{S}_4$ の元に以下のようにアルファベットを割り当てる．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 1

$\mathfrak{S}_4$ 上の $\mathfrak{S}_4$ の作用

$$\mathfrak{S}_4 \times \mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_4,\ (\sigma, \sigma') \mapsto \sigma \cdot \sigma' := \sigma\sigma'\sigma^{-1}$$

を考える (第 13 回講義資料例 7 参照)．このとき，この作用に関する (1 2) の $\mathfrak{S}_4$-軌道

$$\mathfrak{S}_4 \cdot (1\ 2)$$

に含まれる元を冒頭で定義した記号を用いて全て挙げよ．(ヒント：第 5 回本レポート課題問題 2 (1) で示した事実を用いる．)

問題 1 解答例． B, C, F, G, O, V. □

問題 1 補足解説． 本問を解くにあたっては，第 5 回本レポート課題問題 2 (1) で示した以下の命題が役に立つ．

命題

n を 2 以上の整数とする．任意の巡回置換 $(i_1\ i_2\ \cdots\ i_k) \in \mathfrak{S}_n$ と $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対し，

$$\sigma(i_1\ i_2\ \cdots\ i_k)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\ \sigma(i_2)\ \cdots\ \sigma(i_k))$$

となる．

* *e-mail*: hoya@shibaura-it.ac.jp

命題より，

$$\mathfrak{S}_4 \cdot (1\ 2) = \{\sigma \cdot (1\ 2) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_4\} = \{\sigma(1\ 2)\sigma^{-1} \mid \sigma \in \mathfrak{S}_4\} = \{(\sigma(1)\ \sigma(2)) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_4\}.$$

ここで，任意の $1 \leq i < j \leq 4$ に対して，$\sigma(1) = i, \sigma(2) = j$ を満たす $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ は存在するので，結局

$$\mathfrak{S}_4 \cdot (1\ 2) = \{(i\ j) \mid 1 \leq i < j \leq 4\} = \{(1\ 2), (1\ 3), (1\ 4), (2\ 3), (2\ 4), (3\ 4)\}$$

となる．よって，これらの元を 2 行配列の表示に戻せば解答が得られる． □

問題 2

再び問題 1 で考えた作用を考える．このとき，この作用に関する $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ の $\mathfrak{S}_4$-軌道

$$\mathfrak{S}_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

に含まれる元を冒頭で定義した記号を用いて全て挙げよ．

問題 2 解答例． H, Q, X. □

問題 2 補足解説． 本問も問題 1 の補足解説に述べた命題を用いて解いてみよう．まず，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ をどの 2 つも互いに素な巡回置換の合成として書くと，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2)(3\ 4)$$

となる．よって，命題から，

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_4 \cdot (1\ 2)(3\ 4) &= \{\sigma \cdot (1\ 2)(3\ 4) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_4\} \\ &= \{\sigma(1\ 2)(3\ 4)\sigma^{-1} \mid \sigma \in \mathfrak{S}_4\} \\ &= \{\sigma(1\ 2)\sigma^{-1}\sigma(3\ 4)\sigma^{-1} \mid \sigma \in \mathfrak{S}_4\} \\ &= \{(\sigma(1)\ \sigma(2))(\sigma(3)\ \sigma(4)) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_4\}. \end{aligned}$$

ここで，互いに素な巡回置換の可換性より，$(\sigma(1)\ \sigma(2))(\sigma(3)\ \sigma(4)) = (\sigma(3)\ \sigma(4))(\sigma(1)\ \sigma(2))$ が成り立つことに注意すると，

$$\{(\sigma(1)\ \sigma(2))(\sigma(3)\ \sigma(4)) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_4\} = \{(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$$

となる．よって，結局

$$\mathfrak{S}_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \{(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$$

となる．これらの元を 2 行配列の表示に戻せば解答が得られる． □

問題 3

再び問題 1 で考えた作用を考える．この作用に関して $\mathfrak{S}_4$ を軌道分解したとき，現れる $\mathfrak{S}_4$-軌道は全部で $\boxed{\text{ア}}$ 個である．$\boxed{\text{ア}}$ に入る自然数を半角数字で入力せよ．なお，自然数なので 2 桁以上の数もあり得ることに注意せよ．

問題 3 解答例． 5. □

問題 3 補足解説. 問題 1, 2 に引き続いて $\mathfrak{S}_4$ の分割が得られるまで $\mathfrak{S}_4$-軌道を求める．単位元 e の $\mathfrak{S}_4$-軌道は，

$$\mathfrak{S}_4 \cdot e = \{\sigma e \sigma^{-1} \mid \sigma \in \mathfrak{S}_4\} = \{e\}$$

となる．ここまで求めた軌道に現れていない元として $(1\ 2\ 3) \in \mathfrak{S}_4$ を取り，その軌道を求める．問題 1 の補足解説に述べた命題から，

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_4 \cdot (1\ 2\ 3) &= \{\sigma \cdot (1\ 2\ 3) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_4\} \\ &= \{\sigma (1\ 2\ 3) \sigma^{-1} \mid \sigma \in \mathfrak{S}_4\} \\ &= \{(\sigma(1)\ \sigma(2)\ \sigma(3)) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_4\} \\ &= \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)\}.\end{aligned}$$

さらにここまで求めた軌道に現れていない元として $(1\ 2\ 3\ 4) \in \mathfrak{S}_4$ を取り，その軌道を求める．問題 1 の補足解説に述べた命題から，

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_4 \cdot (1\ 2\ 3\ 4) &= \{\sigma \cdot (1\ 2\ 3\ 4) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_4\} \\ &= \{\sigma (1\ 2\ 3\ 4) \sigma^{-1} \mid \sigma \in \mathfrak{S}_4\} \\ &= \{(\sigma(1)\ \sigma(2)\ \sigma(3)\ \sigma(4)) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_4\} \\ &= \{(1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 4\ 3\ 2)\}.\end{aligned}$$

以上で全ての $\mathfrak{S}_4$ の元がいずれかの $\mathfrak{S}_4$-軌道に現れた．すなわち，

$$\mathfrak{S}_4 = \mathfrak{S}_4 \cdot e \cup \mathfrak{S}_4 \cdot (1\ 2) \cup \mathfrak{S}_4 \cdot (1\ 2)(3\ 4) \cup \mathfrak{S}_4 \cdot (1\ 2\ 3) \cup \mathfrak{S}_4 \cdot (1\ 2\ 3\ 4)$$

となるので，これが $\mathfrak{S}_4$ の軌道分解となる．よって，求める $\mathfrak{S}_4$-軌道の数は 5 個である．

今回考えた $\mathfrak{S}_4$ の作用は $\mathfrak{S}_4$ の随伴作用と呼ばれるものである (第 13 回講義資料例 7)．一般の群 G に対して，随伴作用に関する G-軌道は**共役類**と呼ばれる (第 14 回講義資料定義 13.11)．上記計算から類推されるように，$\mathfrak{S}_n$ の共役類は，$\mathfrak{S}_n$ の元をどの 2 つも互いに素な巡回置換の合成として書いた時の「形」が同じになるものをまとめたものである．この「形」を**サイクルタイプ**と呼ぶ．$\mathfrak{S}_4$ におけるサイクルタイプの種類は e 型 , $(i\ j)$ 型, $(i\ j)(k\ \ell)$ 型, $(i\ j\ k)$ 型, $(i\ j\ k\ \ell)$ 型 の 5 通りなので，5 つの共役類があるということになる．このあたりのことは第 14 回講義資料の p.10–11 で詳しく説明されているので一般化に興味のある方は是非読んでいただきたい． □

問題 4

以下の主張の正誤を判定せよ．
『元の個数が 5 個である集合 X 上の $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ の作用であって，ある $[a]_7 \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ と $x \in X$ に対して，$[a]_7 \cdot x \neq x$ が満たされるものが存在する．』

問題 4 解答例. 間違い． □

問題 4 補足解説. $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times X \to X$, $([a]_7, x) \mapsto [a]_7 \cdot x$ を元の個数が 5 個である集合 X 上の $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ の作用とする．このとき，軌道・固定群定理より，任意の $x \in X$ に対して，$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$-軌道 $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \cdot x$ の元の個数は $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ の位数 7 の約数となる (第 13 回講義資料系 12.5)．7 の約数は 1 と 7 のみであるが，いま X の元の個数は 5 個なので，元の個数が 7 個の軌道は現れない．よって，このとき全ての $x \in X$ に対して，

$$|(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \cdot x| = 1$$

となる．ここで，群作用の定義から $[0]_7 \cdot x = x$ となるので，$x \in (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \cdot x$ であるから，このとき

$$(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \cdot x = \{x\}$$

である．これは任意の $[a]_7 \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ に対して，

$$[a]_7 \cdot x = x$$

となることを意味する．

以上より，元の個数が 5 個である集合 X 上の $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ の作用は，任意の $[a]_7 \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ と $x \in X$ に対して $[a]_7 \cdot x = x$ を満たすものしか存在しないということがわかる (すなわち問題 4 の主張にあるような例は構成できないということがわかる)． $\square$