代数学 I 第 14 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

以下の主張の正誤を判定せよ．ただし，e は G の単位元である．
『群 G の $\{e\}$ でないある部分群 H が $\mathrm{D}(H) = H$ を満たすとき，G は必ず非可解である．』

問題 1 解答例． 正しい． □

問題 1 補足解説． H を群 G' の部分群としたとき，

$$\mathrm{D}(H) \subset \mathrm{D}(G')$$

となるのであった (第 14 回講義資料 (13.2) 式参照)．この事実を $G' = G, \mathrm{D}(G), \mathrm{D}_2(G), \mathrm{D}_3(G) \dots$ として順に用いると，$H = \mathrm{D}(H)$ となるとき，

$$\begin{aligned}
&H = \mathrm{D}(H) \subset \mathrm{D}(G)\\
&H = \mathrm{D}(H) \subset \mathrm{D}(\mathrm{D}(G)) = \mathrm{D}_2(G)\\
&H = \mathrm{D}(H) \subset \mathrm{D}(\mathrm{D}_2(G)) = \mathrm{D}_3(G)\\
&\cdots\\
&H = \mathrm{D}(H) \subset \mathrm{D}(\mathrm{D}_{k-1}(G)) = \mathrm{D}_k(G)\\
&H = \mathrm{D}(H) \subset \mathrm{D}(\mathrm{D}_k(G)) = \mathrm{D}_{k+1}(G)\\
&\cdots
\end{aligned}$$

となるので，任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，

$$\{e\} \subsetneq H \subset \mathrm{D}_k(G)$$

となるので，特に $\mathrm{D}_k(G) \neq \{e\}$ である．よって，G は非可解である． □

問題 2

以下の主張の正誤を判定せよ．
『群 G から $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ への群準同型 $f\colon G \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ が存在するとき，

$$\overline{f}\colon G/\mathrm{D}(G) \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z},\ g\mathrm{D}(G) \mapsto f(g)$$

は必ず well-defined な群準同型を与える．』

問題 2 解答例． 正しい． □

問題 2 補足解説． 準同型定理より，

$$G/\operatorname{Ker} f \simeq \operatorname{Im} f$$

であるが，$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ は可換群なので，その部分群である $\operatorname{Im} f$ も可換群である．よって，$G/\operatorname{Ker} f$ も可換群となるので，第 14 回講義資料命題 13.4 より，

$$\mathrm{D}(G) \subset \operatorname{Ker} f \tag{$*$}$$

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

である．さて，$\overline{f}$ の well-defined 性を示そう．$g\mathrm{D}(G)=g'\mathrm{D}(G)$ が成立するとき，ある $h\in\mathrm{D}(G)$ が存在して $g=g'h$ となるが，$(*)$ より $h\in\operatorname{Ker}f$ でもあることに注意すると，

$$f(g)=f(g'h)=f(g')+f(h)=f(g')+[0]_3=f(g')$$

となる ($\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ が加法群であることに注意)．これより，$\overline{f}$ は well-defined である．さらに，f が準同型であったことより，任意の $g\mathrm{D}(G), g'\mathrm{D}(G)\in G/\mathrm{D}(G)$ に対して，

$$\overline{f}(g\mathrm{D}(G)\cdot g'\mathrm{D}(G))=\overline{f}(gg'\mathrm{D}(G))=f(gg')=f(g)+f(g')=\overline{f}(g\mathrm{D}(G))+\overline{f}(g'\mathrm{D}(G))$$

となる．よって，$\overline{f}$ は準同型である．

なお，以上の証明においては実質的に $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の可換性しか用いていない．よって，全く同様の議論で以下の命題が証明できる．

命題

群 G から<u>可換群</u>A への群準同型 $f\colon G\to A$ が存在するとき，

$$\overline{f}\colon G/\mathrm{D}(G)\to A,\ g\mathrm{D}(G)\mapsto f(g)$$

は well-defined な群準同型を与える．つまり以下の図式を可換にする $\overline{f}$ が存在する．

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "商写像"'] & A \\ G/\mathrm{D}(G) \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

□

問題 3

群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と以下の群がそれぞれ同型であるかどうかを判定せよ．

(1) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

(2) クラインの 4 元群 V.

問題 3 解答例． (1) 同型でない． (2) 同型である． □

問題 3 補足解説．

$$\begin{aligned}([0]_2,[1]_2)+([0]_2,[1]_2)&=([0]_2,[2]_2)=([0]_2,[0]_2)\\([1]_2,[0]_2)+([1]_2,[0]_2)&=([2]_2,[0]_2)=([0]_2,[0]_2)\\([1]_2,[1]_2)+([1]_2,[1]_2)&=([2]_2,[2]_2)=([0]_2,[0]_2)\end{aligned}$$

となるので，$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の単位元以外の元は全て位数 2 である．一方で $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ は位数 4 の元 $[1]_4,[3]_4$ をもつ．よって，$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ は同型ではない．

なお，この考え方を一般化すると，n_1 と n_2 が互いに素でない正の整数とき必ず

$$\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}\not\simeq\mathbb{Z}/n_1n_2\mathbb{Z}$$

となることが証明できる．厳密な証明は問題 4 を参照すること．次に V と構造を比較する．それぞれの群の乗積表を書いてみると (第 10 回講義資料例 4 参照)，

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$([0]_2,[0]_2)$	$([0]_2,[1]_2)$	$([1]_2,[0]_2)$	$([1]_2,[1]_2)$
$([0]_2,[0]_2)$	$([0]_2,[0]_2)$	$([0]_2,[1]_2)$	$([1]_2,[0]_2)$	$([1]_2,[1]_2)$
$([0]_2,[1]_2)$	$([0]_2,[1]_2)$	$([0]_2,[0]_2)$	$([1]_2,[1]_2)$	$([1]_2,[0]_2)$
$([1]_2,[0]_2)$	$([1]_2,[0]_2)$	$([1]_2,[1]_2)$	$([0]_2,[0]_2)$	$([0]_2,[1]_2)$
$([1]_2,[1]_2)$	$([1]_2,[1]_2)$	$([1]_2,[0]_2)$	$([0]_2,[1]_2)$	$([0]_2,[0]_2)$

V	e	$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 3)(2\ 4)$	$(1\ 4)(2\ 3)$
e	e	$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 3)(2\ 4)$	$(1\ 4)(2\ 3)$
$(1\ 2)(3\ 4)$	$(1\ 2)(3\ 4)$	e	$(1\ 4)(2\ 3)$	$(1\ 3)(2\ 4)$
$(1\ 3)(2\ 4)$	$(1\ 3)(2\ 4)$	$(1\ 4)(2\ 3)$	e	$(1\ 2)(3\ 4)$
$(1\ 4)(2\ 3)$	$(1\ 4)(2\ 3)$	$(1\ 3)(2\ 4)$	$(1\ 2)(3\ 4)$	e

となる．これより，写像 $f\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to V$ を

$$([0]_2, [0]_2) \mapsto e \qquad ([0]_2, [1]_2) \mapsto (1\ 2)(3\ 4)$$
$$([1]_2, [0]_2) \mapsto (1\ 3)(2\ 4) \qquad ([1]_2, [1]_2) \mapsto (1\ 4)(2\ 3)$$

と定義すると乗積表がちょうど対応することがわかり，f が群同型となることがわかる．よって，$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と V は同型である．

なお，実は一般に位数が 4 の非巡回群 G は必ず V(すなわち $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) に同型であることが以下のように示せる．$G$ の単位元を e とし，$G = \{e, a, b, c\}$ と書く．まず，G は非巡回群であることより，位数 4 の元 g を持たないが，G の元の位数は G の位数の約数なので，このとき G の任意の単位元以外の元の位数は 2 である．すなわち，$a^2 = b^2 = c^2 = e$ である．これより，任意の $g \in G$ に対し，$g^{-1} = g$ である．よって，任意の $g_1, g_2 \in G$ に対して，

$$g_1g_2 = (g_1g_2)^{-1} = g_2^{-1}g_1^{-1} = g_2g_1$$

となるので，G は必ず可換群である．次に，$ab(= ba) = c$ であることを示そう．

- $ab = e$ とすると，$b = a^{-1} = a$ となって不適.
- $ab = a$ とすると，両辺に a^{-1} を掛けると $b = e$ となるので不適.
- $ab = b$ とすると，両辺に b^{-1} を掛けて $a = e$ となるので不適.

これらより消去法から $ab = c$ である．以上を踏まえて G の乗積表を書くと以下のようになる．

G	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	$a^2 = e$	$ab = c$	$a^2b = b$
b	b	$ba = c$	e	$b^2a = a$
c	c	$ba^2 = b$	$ab^2 = a$	e

これより，写像 $f'\colon G \to V$ を

$$e \mapsto e \qquad a \mapsto (1\ 2)(3\ 4) \qquad b \mapsto (1\ 3)(2\ 4) \qquad c \mapsto (1\ 4)(2\ 3)$$

と定義すると乗積表がちょうど対応することがわかり，f' が群同型となることがわかる．よって，G と V は同型である．

ここでの考察より，位数 4 の群はいつも可換で，同型の違いを除くと V か $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ しかないということがわかる． $\square$

問題 4

以下の文章が，n_1 と n_2 が互いに素でない正の整数とき必ず

$$\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Z}/n_1n_2\mathbb{Z}$$

となることの証明として適切かどうかを判定せよ．

『 n_1 と n_2 の最小公倍数を ℓ とすると，$\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}$ の任意の元 $([m_1]_{n_1}, [m_2]_{n_2})$ は

$$\begin{aligned}\underbrace{([m_1]_{n_1}, [m_2]_{n_2}) + \cdots + ([m_1]_{n_1}, [m_2]_{n_2})}_{\ell\text{個}} &= ([\ell m_1]_{n_1}, [\ell m_2]_{n_2}) \\ &= ([0]_{n_1}, [0]_{n_2})\end{aligned}$$

を満たす．特に，$\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}$ の元の位数は全て ℓ 以下である．一方，$\mathbb{Z}/n_1n_2\mathbb{Z}$ は位数 n_1n_2 の元 $[1]_{n_1n_2}$ を持つ．いま，n_1, n_2 は互いに素でないので，$\ell < n_1n_2$ となるため，$\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}/n_1n_2\mathbb{Z}$ は同型でない．』

問題 4 解答例． 適切である． □

問題 4 補足解説． これは正しい証明になっている．中国式剰余定理の形の同型は n_1 と n_2 が互いに素でないと絶対に成立しないということがここからわかる． □