代数学 I 第 5 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

前回は n 次対称群と呼ばれる群を導入し，有限個のものの置換を群論的にとらえるということを行った．また，その中ではあみだくじとの対応も観察し，視覚的に二項演算を計算するということも行った．今回は n 次二面体群と呼ばれる新しい群の例を，n 次対称群の部分群として定義する．n 次二面体群は正 n 角形の対称変換のなす群と考えられるものである．

4.1 n 次二面体群

本節では n を 3 以上の整数とする．本節では n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の元に以下のように名前を付ける[*1]．

$$\sigma \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & k+1 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ \cdots\ n)$$
$$\tau \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k & \cdots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & \cdots & n+2-k & \cdots & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

定義 4.1

上の記号のもとで，

$$D_n \coloneqq \{e, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{n-1}, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \dots, \sigma^{n-1}\tau\}$$

とする (k 乗は k 回合成するという意味)．これを，**n 次二面体群 (dihedral group of degree n)** という．

注意 1. $n = 3$ のとき，$D_3 = \mathfrak{S}_3$ である．実際，

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \sigma^2\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

である．n が 4 以上の時は，$D_n \subsetneq \mathfrak{S}_n$ である．これは D_n の元の個数が高々 $2n$ 個，$\mathfrak{S}_n$ の元の個数が $n!$ 個であることからわかる．

実は D_n は $\mathfrak{S}_n$ の部分群となる．この群の "意味" については本講義資料の最後に解説することにして，まずは部分群であることを確かめるために，σ と τ の間の関係を記述しておこう．

命題 4.2

上記の $\sigma, \tau \in D_n$ について以下が成立する．

(1) $1 \leq \ell \leq n-1$ のとき $\sigma^\ell \neq e$ であり，$\sigma^n = e$.

(2) $\tau^2 = e$．すなわち，$\tau^{-1} = \tau$.

(3) $\tau\sigma = \sigma^{-1}\tau$, $\tau\sigma^{-1} = \sigma\tau$.

---

* *e-mail*: hoya@shibaura-it.ac.jp

*1 これまでの節では $\mathfrak{S}_n$ の任意の元を表すときに σ としばしば書いていたが，この節では常に $(1\ 2\ \cdots\ n)$ を表すことにするので注意せよ．

証明. (1) は第 4 回講義資料命題 3.4 (2) よりわかる．(2) は直接計算すれば直ちにわかる．(3) の 1 つめの式を確かめてみよう．まず,

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & \cdots & k-1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$$

である．これを踏まえると,

$$\begin{aligned}
\tau\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k & \cdots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & \cdots & n+2-k & \cdots & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & k+1 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & n+1-k & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
\sigma^{-1}\tau &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & \cdots & k-1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k & \cdots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & \cdots & n+2-k & \cdots & 3 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & n+1-k & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

となるので，確かに $\tau\sigma = \sigma^{-1}\tau$ である．最後に $\tau\sigma = \sigma^{-1}\tau$ の両辺に左と右から τ を合成すると,

$$\tau\tau\sigma\tau = \tau\sigma^{-1}\tau\tau \quad \Leftrightarrow \quad \sigma\tau = \tau\sigma^{-1} \qquad (\tau^2 = e \text{ より})$$

となる．よって，(3) の 2 つめの式 $\tau\sigma^{-1} = \sigma\tau$ も成立する． □

それでは以下の定理を証明しよう．

定理 4.3

n 次二面体群 D_n は $\mathfrak{S}_n$ の位数 $2n$ の部分群である．

まず，D_n は定義より明らかに空集合ではない．よって，この定理の証明するためには

(1) D_n が二項演算で閉じていること．
(2) D_n が逆元を取る操作について閉じていること．
(3) D_n の位数が $2n$ であること，つまり，$e, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{n-1}, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \ldots, \sigma^{n-1}\tau$ が全て異なる元であること．

の 3 つを示せば良いことがわかる (第 1, 2 回講義資料命題 1.5)．これらを順に確かめる．

(1) の証明：まず命題 4.2 (1), (3) を繰り返し用いることで，以下は直ちにわかる．

補題 4.4

D_n において以下が成立する．

(1) 任意の $k, \ell \in \mathbb{Z}$ に対し，$\sigma^{k+\ell n} = \sigma^k$．特に，任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対し，ある $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ が存在して，$\sigma^m = \sigma^r \in D_n$ となる．
(2) 任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対し，$\tau\sigma^k = \sigma^{-k}\tau$.

なお補題 4.4 (1) 後半の主張は，任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$m = qn + r$$

を満たす $q \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < n$ が存在することから (q は m を n で割った商，r は余り)，補題 4.4 (1) 前半の主張より,

$$\sigma^m = \sigma^{qn+r} = \sigma^r$$

となって示される．さて，命題 4.2 (2)，補題 4.4 (2) より，任意の $k, \ell \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ に対して,

$$\begin{aligned}
&\sigma^k\sigma^\ell = \sigma^{k+\ell} && (\sigma^k\tau)\sigma^\ell = \sigma^k(\tau\sigma^\ell) = \sigma^k(\sigma^{-\ell}\tau) = \sigma^{k-\ell}\tau \\
&\sigma^k(\sigma^\ell\tau) = \sigma^{k+\ell}\tau && (\sigma^k\tau)(\sigma^\ell\tau) = \sigma^k(\tau\sigma^\ell)\tau = \sigma^k(\sigma^{-\ell}\tau)\tau = \sigma^{k-\ell}\tau^2 = \sigma^{k-\ell}
\end{aligned}$$

となる．ここで，補題 4.4 (1) より，ある $r_1, r_2 \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ が存在して，$\sigma^{k+\ell} = \sigma^{r_1}, \sigma^{k-\ell} = \sigma^{r_2}$ となるので，上記の計算結果は全て D_n に属する元となる．よって，D_n は二項演算で閉じている．

(2) の証明：まず一般の群 G において以下が成立する．

補題 4.5

G を群とする．このとき，任意の $g, h \in G$ に対し，

$$(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}.$$

補題 4.5 の証明. $h^{-1}g^{-1}$ が gh の逆元の満たすべき性質を満たしていることを示せばよい．

$$(gh)(h^{-1}g^{-1}) = g(hh^{-1})g^{-1} = geg^{-1} = gg^{-1} = e$$
$$(h^{-1}g^{-1})(gh) = h^{-1}(g^{-1}g)h = h^{-1}eh = h^{-1}h = e$$

より，確かに $h^{-1}g^{-1}$ は gh の逆元 $(gh)^{-1}$ である． □

命題 4.2 (2)，補題 4.4，補題 4.5 より，D_n の元 $\sigma^k, \sigma^k\tau$ $(k = 0, \ldots, n-1)$ に対し，

$$(\sigma^k)^{-1} = \sigma^{-k} \in D_n$$
$$(\sigma^k\tau)^{-1} = \tau^{-1}(\sigma^k)^{-1} = \tau\sigma^{-k} = \sigma^k\tau \in D_n$$

となることがわかる．よって，D_n が逆元を取る操作について閉じていることが示された．

(3) の証明：$\sigma = (1\ 2\ \cdots\ n)$ より，$k = 0, 1, \ldots, n-1$ について，σ^k による 1 の像を見ると，

$$\sigma^k(1) = (1\ 2\ \cdots\ n)^k(1) = k+1$$

となる．よって，1 の像が全て異なるので，σ^k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ は相異なる元である．次に，ある $k_1, k_2 \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ に対して，$\sigma^{k_1}\tau = \sigma^{k_2}\tau$ となったと仮定すると，この両辺に右から τ を合成して，

$$\sigma^{k_1}\tau^2 = \sigma^{k_2}\tau^2,\ \text{つまり},\ \sigma^{k_1} = \sigma^{k_2} \quad (\text{命題 4.2 (2) より})$$

となる．このとき上で証明したことより，$k_1 = k_2$．これより $\sigma^k\tau$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ も相異なる元であることがわかった．最後に任意の $k_1, k_2 \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ に対して，$\sigma^{k_1} \neq \sigma^{k_2}\tau$ となることを示せば良い．再びそれぞれの写像による 1 の像を考えると，

$$\sigma^{k_1}(1) = k_1 + 1, \qquad \sigma^{k_2}\tau(1) = \sigma^{k_2}(1) = k_2 + 1$$

となるので，$k_1 \neq k_2$ のとき，$\sigma^{k_1} \neq \sigma^{k_2}\tau$ である．さらに，$k_1 = k_2$ のときも，$\sigma^{k_1} = \sigma^{k_1}\tau$ であったとすると両辺に左から σ^{-k_1} を合成すると $e = \tau$ となって矛盾するので，やはり $\sigma^{k_1} \neq \sigma^{k_1}\tau$ である．以上より，(3) の主張は示された．

以上より，定理 4.3 の証明が完了した．

例 1. 7 次二面体群 D_7 における計算例を以下に示す．

$$\sigma^4\sigma^5 = \sigma^9 = \sigma^2, \qquad (\sigma^2\tau)\sigma^3 = \sigma^2(\tau\sigma^3) = \sigma^2(\sigma^{-3}\tau) = \sigma^{-1}\tau = \sigma^6\tau,$$
$$(\sigma^2\tau)(\sigma^4\tau) = \sigma^2(\tau\sigma^4)\tau = \sigma^2(\sigma^{-4}\tau)\tau = \sigma^{-2}\tau^2 = \sigma^5.$$

なお，命題 4.2 (3) から D_n は非可換群であることに注意する (n は 3 以上なので，$\sigma^{-1} = \sigma^{n-1} \neq \sigma$)．

注意 2. 本講義資料では n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の部分群として n 次二面体群 D_n を導入したので，$n \geq 3$ という制約が入ったが，別の導入 (例えば "生成元と関係式による定義") を採用すると，D_1 や D_2 も定義される．この場合，

$$D_1 = \{e, \tau\} \qquad\qquad D_2 = \{e, \sigma, \tau, \sigma\tau\}$$

であり，

$$\tau^2 = e, \qquad \sigma^2 = e, \qquad \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau \text{ (実際にはこの場合 } \sigma^{-1} = \sigma \text{ である)}$$

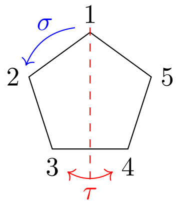
が満たされるものとして定義される．1 つめ，3 つめの式はそれぞれ命題 4.2 (2)，(3) の式であり，2 つめの式は命題 4.2 (1) の関係式の $n = 2$ の場合であることに注意しよう．すなわち，D_1, D_2 に対しても，命題 4.2 は成立するように定義される．なお，$\mathfrak{S}_1 = \{e\}, \mathfrak{S}_2 = \{e, (1\ 2)\}$ であるから，位数を考えれば D_1, D_2 はそれぞれ $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ の部分群ではないということがわかる．

最後に，D_n という群はいったい何なのか?ということを説明しておこう．D_n は実は『正 n 角形の板』の対称変換のなす群と考えることができる．『板』と言っている意味は，表と裏がある (=二面体!) ということである．正 n 角形の板を保つ変換は

$$\text{『}\tfrac{2k\pi}{n}\text{ 回転』と，『(ある固定した対称軸に関して) 折り返してから }\tfrac{2k\pi}{n}\text{ 回転』} (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

の $2n$ 個で全てである．このとき，$\frac{2\pi}{n}$ 回転に対応するものが σ であり，ある固定した対称軸に関する折り返しに対応するものが τ である．こう考えると，$\sigma^n = e$ や $\tau^2 = e$ といった性質に親しみが持てるであろう．$\tau\sigma = \sigma^{-1}\tau, \tau\sigma^{-1} = \sigma\tau$ も確かめてもらいたい．

D_5 の場合：



なぜこれが対称群 $\mathfrak{S}_n$ の部分群と思えるかというと，上図のように頂点の位置に反時計回りに番号をつけて，変換によって『どの位置の頂点がどの位置の頂点に行くか』という情報を記録することで，各変換は $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ という全単射を与えるからである．この対応を考えることで，D_n は $\mathfrak{S}_n$ の部分群として実現されていたのである．このことを念頭において σ と τ の定義を是非見直してみて欲しい．