代数学 I 第 13 回講義資料

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ は「$1, 2, \cdots, n$ の置換」が合成に関してなす構造を反映した代数的対象であった．また，n 次二面体群は「正 n 角形の板の対称変換」が合成に関してなす構造を反映した代数的対象であった．しかし，これらは群としての性質を見る上では二項演算の形式的なルールさえ覚えておけば，各元が「$1, 2, \cdots, n$ の置換」であるとか，「正 n 角形の板の対称変換」であるといったことは忘れても様々な計算ができた．群はこのように変換の集まりにおける合成法則を形式化して得られるごく抽象的な対象である．この抽象的な群に「$1, 2, \cdots, n$ の置換」や「正 n 角形の板の対称変換」という意味を持たせることは，群を具体的に「表現」することに対応する．これは 2 という数は抽象的なものであるが，これに「木」や「リンゴ」という意味を持たせると「2 本の木」や「2 つのリンゴ」というように 2 の「表現」が得られるということに似ているかもしれない．

今回は群という抽象的な対象がある集合上の変換の集まりとして「表現」される状況を定式化する．このような状況を群がある集合に**作用**しているという．[*1]

11.1　群の作用

定義 11.1

群 G と<u>集合</u> X に対し，**X 上の G の作用 (action of G on X)** とは，写像

$$\psi\colon G \times X \to X,\ (g, x) \mapsto \psi(g, x)$$

であって，次の 2 条件を満たすもののことを言う．

(1) 任意の $x \in X$ に対し，$\psi(e, x) = x$．ただし，e は G の単位元.

(2) 任意の $g, h \in G, x \in X$ に対し，$\psi(gh, x) = \psi(g, \psi(h, x))$．この条件は以下の図式で表される．

$$\begin{tikzcd}
& & (g,h,x) \arrow[lldd, mapsto, bend right] \arrow[rrdd, mapsto, bend left] \arrow[d, phantom, sloped, "\in"] & & \\
& & G\times G\times X \arrow[ld, "(\text{二項演算})\times\mathrm{id}"'] \arrow[rd, "\mathrm{id}\times\psi"] & & \\
(gh,x) \arrow[r, phantom, "\in"] \arrow[rrdd, mapsto, bend right] & G\times X \arrow[rd, "\psi"'] & \circlearrowleft & G\times X \arrow[ld, "\psi"] \arrow[r, phantom, "\ni"] & (g,\psi(h,x)) \arrow[lldd, mapsto, bend left] \\
& & X \arrow[d, phantom, sloped, "\ni"] & & \\
& & \psi(gh,x)=\psi(g,\psi(h,x)) & &
\end{tikzcd}$$

注意 1. 作用は $\psi(g, x)$ を単に $g \cdot x$ と書くことにするとしばしば見やすくて便利である．以下ではこの記号を頻繁に用いる．(群の二項演算と混乱しないように！) 例えば，作用の定義条件はこの記法を用いると以下のように書ける．

---

* *e-mail*：`hoya@shibaura-it.ac.jp`

*1 実は「表現 (representation)」というのは数学用語できちんと定義がある．もう少しちゃんと言うと表現とは「ベクトル空間への線型な作用」である．私 (大矢) の専門分野はこのような表現を調べる**表現論**と呼ばれる分野なので，進んで勉強したい方はぜひ質問に来てもらいたい.

(1)′ 任意の $x \in X$ に対し，$e \cdot x = x$.

(2)′ 任意の $g, h \in G, x \in X$ に対し，$gh \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$.

注意 2. ここで定義した作用は**左作用**と呼ばれるものである．講義内では左作用のみを扱うのでこれを単に作用と呼ぶことにする．ちなみに，**集合 X 上の群 G の右作用 (right action of G on X)** とは，写像

$$\psi \colon G \times X \to X,\ (g, x) \mapsto \psi(g, x)$$

であって，次の 2 条件を満たすもののことを言う．

(i) 任意の $x \in X$ に対し，$\psi(e, x) = x$．ただし，e は G の単位元．(左作用の定義条件の (1) と同じ)

(ii) 任意の $g, h \in G, x \in X$ に対し，$\psi(gh, x) = \psi(h, \psi(g, x))$.

右作用の定義条件も $\psi(g, x)$ を単に $x \cdot g$ と書くことにすると以下のように見やすくなる．

(i)′ 任意の $x \in X$ に対し，$x \cdot e = x$.

(ii)′ 任意の $g, h \in G, x \in X$ に対し，$x \cdot gh = (x \cdot g) \cdot h$.

例 1. n を正の整数とし，S を集合とする．

$$S^n \coloneqq \underbrace{S \times \cdots \times S}_{n \text{ 個}} = \{(s_1, s_2, \ldots, s_n) \mid s_i \in S,\ i = 1, \ldots, n\}$$

とする．このとき，写像

$$\mathfrak{S}_n \times S^n \to S^n,\ (\sigma, (s_1, s_2, \ldots, s_n)) \mapsto \sigma \cdot (s_1, s_2, \ldots, s_n) \coloneqq (s_{\sigma^{-1}(1)}, s_{\sigma^{-1}(2)}, \ldots, s_{\sigma^{-1}(n)})$$

は S^n 上の $\mathfrak{S}_n$ の作用を定める．「なぜ σ^{-1} になったのか」と思うかもしれないが，これは σ の作用が k 番目の成分 s_k を $\sigma(k)$ 番目に移動させる (よって移動後の k 番目にはもともとの $\sigma^{-1}(k)$ 番目の成分 $s_{\sigma^{-1}(k)}$ が書かれている) というように考えれば良い．例えば，$n = 6, S = \{C, E, F, O\}$ の場合，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot (C, O, F, F, E, E) = (E, C, F, E, F, O),$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot (C, O, F, F, E, E) = (C, F, O, F, E, E),$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot (C, O, F, F, E, E) = (C, O, F, F, E, E)$$

などとなる．すなわち，n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ を「長さ n の (S の元からなる) 文字列の置換」として作用させているのである．実際これが作用であることは次のように確かめられる．

(1) 任意の $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S^n$ に対し，

$$e \cdot (s_1, s_2, \ldots, s_n) = (s_{e^{-1}(1)}, s_{e^{-1}(2)}, \ldots, s_{e^{-1}(n)}) = (s_1, s_2, \ldots, s_n).$$

(2) 任意の $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_n, (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S^n$ に対し，

$$\begin{aligned}(\sigma_1\sigma_2) \cdot (s_1, s_2, \ldots, s_n) &= (s_{(\sigma_1\sigma_2)^{-1}(1)}, s_{(\sigma_1\sigma_2)^{-1}(2)}, \ldots, s_{(\sigma_1\sigma_2)^{-1}(n)}) \\ &= (s_{\sigma_2^{-1}(\sigma_1^{-1}(1))}, s_{\sigma_2^{-1}(\sigma_1^{-1}(2))}, \ldots, s_{\sigma_2^{-1}(\sigma_1^{-1}(n))}) \\ &= \sigma_1 \cdot (s_{\sigma_2^{-1}(1)}, s_{\sigma_2^{-1}(2)}, \ldots, s_{\sigma_2^{-1}(n)}) \\ &= \sigma_1 \cdot (\sigma_2 \cdot (s_1, s_2, \ldots, s_n)).\end{aligned}$$

なお，第 5 回講義資料での n 次二面体群 D_n の定義を思い出すと，$n \geq 3$ のとき $D_n \subset \mathfrak{S}_n$ であったので，$\mathfrak{S}_n$ の S^n への作用は D_n の S^n への作用も導く．例えば，第 5 回講義資料の記号で，$\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6) \in D_6, \tau = (2\ 6)(3\ 5) \in D_6$ なので，

$$\sigma \cdot (C, O, F, F, E, E) = (E, C, O, F, F, E),$$
$$\tau \cdot (C, O, F, F, E, E) = (C, E, E, F, F, O).$$

などとなる．(以下でも n 次二面体群の元については第 5 回講義資料の記号を用いる．)

例 2. 恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ と複素共役を取る写像 $\mathsf{c}\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C},\ a+bi\mapsto a-bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ がなす群

$$G=\{\mathrm{id}_{\mathbb{C}},\mathsf{c}\}$$

を考える．ここで，二項演算は写像の合成である．これは写像第 1,2 回講義資料 1.1 節で最初の群の例として述べたものであった．このとき，写像

$$G\times\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ (f,z)\mapsto f\cdot z\coloneqq f(z)$$

は $\mathbb{C}$ 上の G の作用を定める．例えば，

$$\mathrm{id}_{\mathbb{C}}\cdot(1+2i)=\mathrm{id}_{\mathbb{C}}(1+2i)=1+2i,\qquad\qquad \mathsf{c}\cdot(1+2i)=\mathsf{c}(1+2i)=1-2i$$

などとなる．これが作用であることは次のように確かめられる．

(1) 任意の $z\in\mathbb{C}$ に対し，$\mathrm{id}_{\mathbb{C}}\cdot z=\mathrm{id}_{\mathbb{C}}(z)=z$.
(2) 任意の $f_1,f_2\in G, z\in\mathbb{C}$ に対し，$(f_1\circ f_2)\cdot z=(f_1\circ f_2)(z)=f_1(f_2(z))=f_1\cdot(f_2\cdot z)$.

例 3. $k\in\mathbb{Z}$ とする．このとき写像

$$\psi\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ (a,n)\mapsto ka+n$$

は集合 $\mathbb{Z}$ 上の加法群 $\mathbb{Z}$ の作用を定める．これが作用であることは次のように確かめられる．

(1) 任意の $n\in\mathbb{Z}$ に対し，$\psi(0,n)=k0+n=n$.
(2) 任意の $a_1,a_2,n\in\mathbb{Z}$ に対し，$\psi(a_1+a_2,n)=k(a_1+a_2)+n=ka_1+(ka_2+n)=\psi(a_1,\psi(a_2,n))$.

写像

$$\psi'\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ (a,n)\mapsto a^2+n$$

は集合 $\mathbb{Z}$ 上の加法群 $\mathbb{Z}$ の作用<u>ではない</u>．なぜなら，このとき $a_1a_2\neq 0$ となる a_1,a_2 に対して，

$$\psi'(a_1+a_2,n)=(a_1+a_2)^2+n=a_1^2+2a_1a_2+a_2^2+n\neq a_1^2+a_2^2+n=\psi'(a_1,\psi'(a_2,n))$$

となり，作用の定義条件の (2) が満たされないためである (なお，定義条件 (1) は満たされる).

写像

$$\psi''\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ (a,n)\mapsto 0\qquad (\text{全てを } 0 \text{ に送る})$$

は集合 $\mathbb{Z}$ 上の加法群 $\mathbb{Z}$ の作用<u>ではない</u>．なぜなら，このとき $n\neq 0$ に対し，

$$\psi''(0,n)=0\neq n$$

となり，作用の定義条件の (1) が満たされないためである (なお，定義条件 (2) は満たされる).

例 4. n を正の整数とし，$\mathbb{K}$ を $\mathbb{Q},\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．このとき，写像

$$\psi\colon GL_n(\mathbb{K})\times\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n,\ (A,\boldsymbol{v})\mapsto A\boldsymbol{v}\ (\text{行列の積})$$

は $\mathbb{K}^n$ 上の一般線型群 $GL_n(\mathbb{K})$ の作用を定める ($\mathbb{K}^n$ の元は n 次列ベクトルと考える)．例えば，$n=2$ のときこの写像は具体的には以下である：

$$\psi\colon GL_2(\mathbb{K})\times\mathbb{K}^2\to\mathbb{K}^2, \left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)\mapsto\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}$$

これが作用であることは次のように確かめられる．

(1) 任意の $\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n$ に対し，$\psi(I_n,\boldsymbol{v})=I_n\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$．ただし，$I_n$ は n 次単位行列　($GL_n(\mathbb{K})$ の単位元).
(2) 任意の $A_1,A_2\in GL_n(\mathbb{K}),\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n$ に対し，

$$\psi(A_1A_2,\boldsymbol{v})=(A_1A_2)\boldsymbol{v}=A_1(A_2\boldsymbol{v})=\psi(A_1,\psi(A_2,\boldsymbol{v}))\quad(\text{行列の積の結合法則}).$$

また，

$$\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) \coloneqq \{A \mid A \text{ は } \mathbb{K} \text{ の元を成分とする } n\times n \text{ 行列 }\}$$

とすると，写像

$$\psi'\colon GL_n(\mathbb{K})\times \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}),\ (P,A)\mapsto PAP^{-1}$$

は $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ 上の $GL_n(\mathbb{K})$ の作用を定める． これが作用であることは次のように確かめられる．

(1) 任意の $A\in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ に対し，$\psi'(I_n,A)=I_nAI_n^{-1}=A$.
(2) 任意の $P_1,P_2\in GL_n(\mathbb{K}), A\in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ に対し，

$$\psi'(P_1P_2,A)=P_1P_2A(P_1P_2)^{-1}=P_1(P_2AP_2^{-1})P_1^{-1}=\psi'(P_1,\psi'(P_2,A)).$$

例 5. $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数全体のなす集合を $C^0(\mathbb{R})$ と書く．このとき，

$$\psi\colon \mathbb{R}\times C^0(\mathbb{R})\to C^0(\mathbb{R}),\ (r,f(x))\mapsto f(x-r) \quad \text{(関数の平行移動)}$$

は $C^0(\mathbb{R})$ 上の加法群 $\mathbb{R}$ の作用を定める．これが作用であることは次のように確かめられる．

(1) 任意の $f(x)\in C^0(\mathbb{R})$ に対し，$\psi(0,f(x))=f(x-0)=f(x)$.
(2) 任意の $r_1,r_2\in\mathbb{R}, f(x)\in C^0(\mathbb{R})$ に対し，

$$\psi(r_1+r_2,f(x))=f(x-(r_1+r_2))=f((x-r_1)-r_2)=\psi(r_1,f(x-r_2))=\psi(r_1,\psi(r_2,f(x))).$$

例 6. 3 変数の複素係数多項式全体の集合を

$$\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]\coloneqq\left\{\sum_{\ell_1,\ell_2,\ell_3\geq 0} a_{\ell_1,\ell_2,\ell_3}x_1^{\ell_1}x_2^{\ell_2}x_3^{\ell_3}\ \middle|\ a_{\ell_1,\ell_2,\ell_3}\in\mathbb{C},\ a_{\ell_1,\ell_2,\ell_3}\text{は有限個を除いて } 0\right\}$$

とする．つまり，$\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$ は複素係数の 3 変数多項式

$$1,\ x_1+x_1x_3,\ 2i+(1+i)x_1^3+\sqrt{2}x_1^4,\ 2\pi i x_2^5x_3^2$$

等を全て集めてきてできる集合である (これは $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間となる)．「a_{ℓ_1,ℓ_2,ℓ_3} は有限個を除いて 0」という条件は単項式の無限和は考えず，有限個の項を持つもののみを考えるという意味である．このとき，写像

$$\mathfrak{S}_3\times\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]\to\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$$

を変数の入れ替えで，

$$\left(\sigma,\sum_{\ell_1,\ell_2,\ell_3\geq 0} a_{\ell_1,\ell_2,\ell_3}x_1^{\ell_1}x_2^{\ell_2}x_3^{\ell_3}\right)\mapsto\sigma\cdot\left(\sum_{\ell_1,\ell_2,\ell_3\geq 0} a_{\ell_1,\ell_2,\ell_3}x_1^{\ell_1}x_2^{\ell_2}x_3^{\ell_3}\right)=\sum_{\ell_1,\ell_2,\ell_3\geq 0} a_{\ell_1,\ell_2,\ell_3}x_{\sigma(1)}^{\ell_1}x_{\sigma(2)}^{\ell_2}x_{\sigma(3)}^{\ell_3}$$

と定める．これは $\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$ 上の 3 次対称群 $\mathfrak{S}_3$ の作用を定める．例えば，

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\cdot(x_1^5x_2^2)&=x_3^5x_1^2\\
\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\cdot(1+x_1+x_2^2x_3^3)&=1+x_2+x_3^2x_1^3\\
\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\cdot(x_1+x_2+x_3)&=x_3+x_2+x_1=x_1+x_2+x_3
\end{aligned}$$

のようにする (つまり対称群の元が指定するように変数を入れ替える)．これが作用であることは次のように確かめられる．

(1) 任意の $\sum_{\ell_1,\ell_2,\ell_3\geq 0} a_{\ell_1,\ell_2,\ell_3}x_1^{\ell_1}x_2^{\ell_2}x_3^{\ell_3}\in\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$ に対し，

$$e\cdot\left(\sum_{\ell_1,\ell_2,\ell_3\geq 0} a_{\ell_1,\ell_2,\ell_3}x_1^{\ell_1}x_2^{\ell_2}x_3^{\ell_3}\right)=\sum_{\ell_1,\ell_2,\ell_3\geq 0} a_{\ell_1,\ell_2,\ell_3}x_{e(1)}^{\ell_1}x_{e(2)}^{\ell_2}x_{e(3)}^{\ell_3}=\sum_{\ell_1,\ell_2,\ell_3\geq 0} a_{\ell_1,\ell_2,\ell_3}x_1^{\ell_1}x_2^{\ell_2}x_3^{\ell_3}.$$

(2) 任意の $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_n$, $\sum_{\ell_1,\ell_2,\ell_3 \geq 0} a_{\ell_1,\ell_2,\ell_3} x_1^{\ell_1} x_2^{\ell_2} x_3^{\ell_3} \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ に対し，

$$\begin{aligned}\sigma_1\sigma_2 \cdot \left(\sum_{\ell_1,\ell_2,\ell_3 \geq 0} a_{\ell_1,\ell_2,\ell_3} x_1^{\ell_1} x_2^{\ell_2} x_3^{\ell_3} \right) &= \sum_{\ell_1,\ell_2,\ell_3 \geq 0} a_{\ell_1,\ell_2,\ell_3} x_{\sigma_1(\sigma_2(1))}^{\ell_1} x_{\sigma_1(\sigma_2(2))}^{\ell_2} x_{\sigma_1(\sigma_2(3))}^{\ell_3} \\ &= \sigma_1 \cdot \left(\sum_{\ell_1,\ell_2,\ell_3 \geq 0} a_{\ell_1,\ell_2,\ell_3} x_{\sigma_2(1)}^{\ell_1} x_{\sigma_2(2)}^{\ell_2} x_{\sigma_2(3)}^{\ell_3} \right) \\ &= \sigma_1 \cdot \left(\sigma_2 \cdot \left(\sum_{\ell_1,\ell_2,\ell_3 \geq 0} a_{\ell_1,\ell_2,\ell_3} x_1^{\ell_1} x_2^{\ell_2} x_3^{\ell_3} \right) \right).\end{aligned}$$

具体例でも見ておこう．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot (1 + x_1 + x_2^2 x_3^3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot (1 + x_1 + x_2^2 x_3^3) = 1 + x_2 + x_3^2 x_1^3 = 1 + x_2 + x_1^3 x_3^2,$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot (1 + x_1 + x_2^2 x_3^3) \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot (1 + x_1 + x_3^2 x_2^3) = 1 + x_2 + x_3^2 x_1^3 = 1 + x_2 + x_1^3 x_3^2.$$

よって，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot (1 + x_1 + x_2^2 x_3^3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot (1 + x_1 + x_2^2 x_3^3) \right).$$

なお，全く同様に n 変数の多項式全体の集合 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ に n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ が変数の入れ替えで作用する．この作用は群の概念がきちんと定義される以前の Lagrange らの時代から研究されていた歴史の古い作用である．実際このような作用の研究 (多項式における変数の入れ替え) から，置換群やより一般の群の概念が生まれてきたということができる．

例 7. G を群とし，e をその単位元とする．このとき，二項演算の写像

$$\psi_\ell \colon G \times G \to G,\ (g, h) \mapsto gh$$

は集合 G 上の群 G の作用を定めているとも考えられる．実際，以下のように作用であることが確かめられる．

(1) 任意の $g \in G$ に対し，$\psi_\ell(e, g) = eg = g$.

(2) 任意の $g_1, g_2, h \in G$ に対し，

$$\psi_\ell(g_1 g_2, h) = (g_1 g_2)h = g_1(g_2 h) = \psi_\ell(g_1, \psi_\ell(g_2, h)) \quad (\text{群の二項演算の結合法則}).$$

また，H を G の部分群とし，写像

$$\psi_{\ell,H} \colon G \times (G/H) \to G/H,\ (g, g'H) \mapsto gg'H$$

を考えると，これは商集合 G/H 上の群 G の作用を定める．作用であることのチェックは上の ψ_ℓ の場合と全く同様である．

写像

$$\psi_{\mathrm{ad}} \colon G \times G \to G,\ (g, h) \mapsto ghg^{-1}$$

は集合 G 上の群 G の作用を定める ($G \times G$ の左側の G が群と思う方)．これが作用であることは次のように確かめられる．

(1) 任意の $g \in G$ に対し，$\psi_{\mathrm{ad}}(e, g) = ege^{-1} = g$.

(2) 任意の $g_1, g_2, h \in G$ に対し，

$$\psi_{\mathrm{ad}}(g_1 g_2, h) = (g_1 g_2)h(g_1 g_2)^{-1} = g_1(g_2 h g_2^{-1})g_1^{-1} = \psi_{\mathrm{ad}}(g_1, \psi_{\mathrm{ad}}(g_2, h)).$$

作用 ψ_{ad} は**随伴作用 (adjoint action)** と呼ばれる．

11.2 軌道・固定部分群

定義 11.2

$G \times X \to X,\ (g, x) \mapsto g \cdot x$ を集合 X 上の群 G の作用とする．G の作用による $x \in X$ の **G-軌道 (G-orbit)** を

$$G \cdot x \coloneqq \{g \cdot x \mid g \in G\} (\subset X)$$

と定める．言葉で書くと，「x から G の元を作用させることで作れる元全体」である．また，$x \in X$ における G の**固定部分群 (stabilizer)** を

$$G_x \coloneqq \{g \in G \mid g \cdot x = x\} (\subset G)$$

と定める．これは言葉で書くと「x の元を動かさない G の元全体」である．記号は似ているが $G \cdot x$ は X の部分集合であり，G_x は G の部分集合であることを注意しておく．

例 8. 写像

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \left(\theta, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \mapsto \theta \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \coloneqq \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos\theta)x - (\sin\theta)y \\ (\sin\theta)x + (\cos\theta)y \end{pmatrix}$$

は実平面 $\mathbb{R}^2$ 上の加法群 $\mathbb{R}$ の作用を定める．これが作用であることは次のように確かめられる．

(1) 任意の $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し，

$$0 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

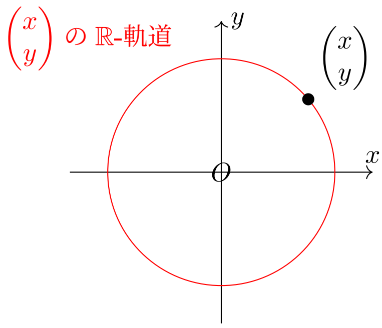
(2) 任意の $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し，

$$\begin{aligned} (\theta_1 + \theta_2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{三角関数の加法定理}) \\ &= \theta_1 \cdot \left(\theta_2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

このとき，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ の $\mathbb{R}$-軌道は，

$$\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} (\cos\theta)x - (\sin\theta)y \\ (\sin\theta)x + (\cos\theta)y \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

となる．これは，$\mathbb{R}^2$ を xy-平面として考えると，原点を中心して $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を通る円として以下のように図示される．



これを念頭におくと固定部分群は以下のようになることがわかる．

- $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき，

$$\mathbb{R}_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)} = \left\{ \theta \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} = \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} = 2\pi\mathbb{Z}.$$

- $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき，

$$\mathbb{R}_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)} = \mathbb{R}_{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} = \left\{ \theta \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}.$$

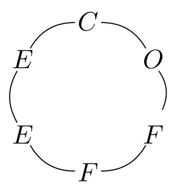
例 9. $S = \{C, E, F, O\}$ としたときの例 1 で考えた D_6 の作用

$$D_6 \times S^6 \to S^6$$

を考える．このとき，

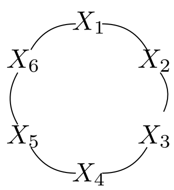
$$\begin{aligned}
e \cdot (C,O,F,F,E,E) &= (C,O,F,F,E,E), & \sigma \cdot (C,O,F,F,E,E) &= (E,C,O,F,F,E), \\
\sigma^2 \cdot (C,O,F,F,E,E) &= (E,E,C,O,F,F), & \sigma^3 \cdot (C,O,F,F,E,E) &= (F,E,E,C,O,F), \\
\sigma^4 \cdot (C,O,F,F,E,E) &= (F,F,E,E,C,O), & \sigma^5 \cdot (C,O,F,F,E,E) &= (O,F,F,E,E,C), \\
\tau \cdot (C,O,F,F,E,E) &= (C,E,E,F,F,O), & \sigma\tau \cdot (C,O,F,F,E,E) &= (O,C,E,E,F,F), \\
\sigma^2\tau \cdot (C,O,F,F,E,E) &= (F,O,C,E,E,F), & \sigma^3\tau \cdot (C,O,F,F,E,E) &= (F,F,O,C,E,E), \\
\sigma^4\tau \cdot (C,O,F,F,E,E) &= (E,F,F,O,C,E), & \sigma^5\tau \cdot (C,O,F,F,E,E) &= (E,E,F,F,O,C),
\end{aligned}$$

である．これは，

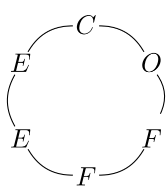


という形のネックレスがあった時に，どこかの文字から始めて，連続して文字を読んだときに得られる文字列全体である．すなわち，数珠順列において (C,O,F,F,E,E) と同一視される順列の全体である．よって，

$$D_6 \cdot (C,O,F,F,E,E) = \left\{ (X_1,X_2,X_3,X_4,X_5,X_6) \in S^6 \;\middle|\; \right.$$



と



は同じネックレス $\Big\}$

となる．

例 10. 例 4 で考えた作用

$$\psi' \colon GL_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}),\ (P, A) \mapsto PAP^{-1}$$

を考える ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とした). 各 $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ のこの作用に関する軌道

$$\{PAP^{-1} \mid P \in GL_n(\mathbb{C})\}$$

の中に対角行列が含まれるとき, A を**対角化可能**というのであった (線形代数 II の内容の言い換え). 対角化とは, A の $GL_n(\mathbb{C})$-軌道の中から対角行列を探してくるということを行っていたとも言える.

以下は軌道と固定部分群に関する以下の基本命題である.

命題 11.3

$G \times X \to X,\ (g, x) \mapsto g \cdot x$ を集合 X 上の群 G の作用とする. このとき, 以下が成立する.

(1) 集合 X において,

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad ある\ g \in G\ が存在して,\ x = g \cdot y$$

とすると, $\sim$ は X 上の同値関係を定める. このとき, $x \in X$ の G-軌道 $G \cdot x$ は同値関係 $\sim$ に関する x の同値類である.

(2) 各 $x \in X$ に対し, 固定部分群 G_x は G の部分群である.

定義 11.4

集合 X 上に群 G が作用しているとき, 命題 11.3 (1) と同値関係の一般論 (第 8 回講義資料命題 6.3) より, X は互いに交わりのない G-軌道に分割されることがわかる. これを, X の**軌道分解**という.

命題 11.3 の証明.

(1) 関係 $\sim$ が同値関係であれば, G 軌道 $G \cdot x$ が $\sim$ に関する x の同値類であることは定義から明らかである. よって, $\sim$ が同値関係であること, つまり, 反射律, 対称律, 推移律を満たすことをチェックすればよい.

(反射律) 任意の $x \in X$ に対して $x = e \cdot x$ なので, $x \sim x$ である.

(対称律) $x \sim y$ であるとき, ある $g \in G$ が存在して, $x = g \cdot y$. このとき

$$g^{-1} \cdot x = g^{-1} \cdot (g \cdot y) = (g^{-1}g) \cdot y = e \cdot y = y$$

となるので, $y \sim x$.

(推移律) $x \sim y$ かつ $y \sim z$ であるとき, ある $g_1, g_2 \in G$ が存在して, $x = g_1 \cdot y, y = g_2 \cdot z$. このとき,

$$x = g_1 \cdot y = g_1 \cdot (g_2 \cdot z) = (g_1 g_2) \cdot z$$

となるので, $x \sim z$.

以上で $\sim$ が X 上の同値関係であることが示された.

(2) まず, $e \cdot x = x$ なので, $e \in G_x$ であるから G_x は空ではない. 任意の $g_1, g_2 \in G_x$ に対し,

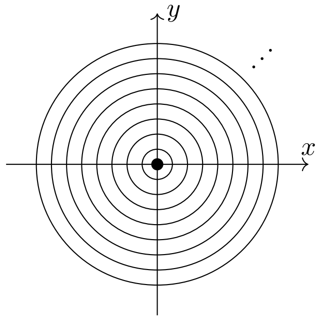
$$(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = g_1 \cdot x = x$$

となるので, $g_1 g_2 \in G_x$. また, 任意の $g \in G_x$ に対し,

$$g^{-1} \cdot x = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1}g) \cdot x = e \cdot x = x.$$

となるので, $g^{-1} \in G_x$. 以上より, G_x は二項演算と逆元を取る操作について閉じている空でない集合なので, G の部分群である. $\square$

例 11. 例 8 の設定では，$\mathbb{R}$-軌道が円の形をしていた．つまり，命題 11.3 (1) の同値関係 $\sim$ は「原点からの距離が等しい点を同一視する」という同値関係になっていることがわかる．このとき，$\mathbb{R}^2$ の $\mathbb{R}$-軌道による軌道分解は $\mathbb{R}^2$ を原点を中心とする円の集まりによって (無限個に) 分解するようなものであることがわかる．
$\mathbb{R}^2$ の軌道分解 (実際には軌道は間隔を空けずに敷き詰められている)：



例 12. S を集合とし，例 1 で考えた D_6 の作用

$$D_6 \times S^6 \to S^6$$

を考える．このとき，例 9 と同様の考察により，一般に $s_i \in S$ $(i = 1, \dots, 6)$ に対して，

$$D_6 \cdot (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6) = \left\{ (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) \in S^6 \;\middle|\; \left(\begin{array}{ccc} & t_1 & \\ t_6 & & t_2 \\ t_5 & & t_3 \\ & t_4 & \end{array}\right) \text{と} \left(\begin{array}{ccc} & s_1 & \\ s_6 & & s_2 \\ s_5 & & s_3 \\ & s_4 & \end{array}\right) \text{は同じネックレス} \right\}$$

となることがわかる．よって，命題 11.3 (1) の同値関係 $\sim$ は「S^6 の元 $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6)$ を $\left(\begin{array}{ccc} & s_1 & \\ s_6 & & s_2 \\ s_5 & & s_3 \\ & s_4 & \end{array}\right)$ というネックレスにしたときに同じになるものを同一視する」という同値関係になっていることがわかる．よって，商集合 $S^6/\sim$ の各元と S の元を (重複ありで)6 つ選んでできるネックレスとは一対一に対応することがわかる．

軌道と固定部分群は以下の軌道・固定群定理により関連付いている．これは雰囲気的には準同型定理に似ているが，これはあくまで集合としての全単射写像 (定義域も終域も一般には群構造を持っていないただの集合) であるということに注意してほしい．

定理 11.5 (軌道・固定群定理 Orbit-stabilizer theorem)

$G \times X \to X,\ (g, x) \mapsto g \cdot x$ を集合 X 上の群 G の作用とする．このとき，任意の $x \in X$ に対し，

$$f_x \colon G/G_x \to G \cdot x,\ gG_x \mapsto g \cdot x$$

は well-defined な全単射写像となる[*2]．これより，特に

$$(G : G_x) = |G \cdot x|$$

である．ただし，左辺は G_x の G における指数である．

[*2] ここで，$G \cdot x$ は X の部分集合で群ではなく，G_x は一般には正規部分群では無いので G/G_x も一般には群構造を持たない単なる商集合であることに注意！このため，f_x は群同型ではなく，単なる集合の間の全単射写像である．

証明. f_x の well-defined 性：

$$g_1G_x = g_2G_x\text{であるとき，} g_1 \cdot x = g_2 \cdot x$$

となることを示せばよい．$g_1G_x = g_2G_x$ のとき，ある $h \in G_x$ が存在して，$g_1 = g_2h$．これより，

$$g_1 \cdot x = (g_2h) \cdot x = g_2 \cdot (h \cdot x) = g_2 \cdot x$$

となる．これより f_x は well-defined であることが示された．
f_x の全単射性：全射性は f_x の定義と G-軌道の定義から明らかである．単射性を示す．$g_1G_x \neq g_2G_x$ とする．このとき，$g_1^{-1}g_2 \notin G_x$ なので，

$$x \neq (g_1^{-1}g_2) \cdot x. \tag{11.1}$$

ここで，もし $g_1 \cdot x = g_2 \cdot x$ であると仮定すると，

$$\begin{aligned} g_1^{-1} \cdot (g_1 \cdot x) &= (g_1^{-1}g_1) \cdot x = e \cdot x = x \\ \| \quad & \\ g_1^{-1} \cdot (g_2 \cdot x) &= (g_1^{-1}g_2) \cdot x \end{aligned}$$

となって，(11.1) に矛盾する．よって，このとき $g_1 \cdot x \neq g_2 \cdot x$ である．まとめると，$g_1G_x \neq g_2G_x$ のとき，

$$f_x(g_1G_x) = g_1 \cdot x \neq g_2 \cdot x = f_x(g_2G_x).$$

となることが示されたので，f_x は単射である．
$(G : G_x) = |G \cdot x|$：指数の定義より，G/G_x の元の個数が $(G : G_x)$ である．よって，G/G_x と $G \cdot x$ の間に全単射写像が存在することから，

$$(G : G_x) = |G \cdot x|$$

である． □

以下は軌道・固定群定理とラグランジュの定理 (第 9 回講義資料定理 7.2) から直ちにわかる．

系 11.6

G を有限群とし，$G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$ を集合 X 上の G の作用とする．このとき，任意の $x \in X$ に対し，

$$|G \cdot x| = (G : G_x) = \frac{|G|}{|G_x|}$$

である．特に各 G-軌道に含まれる元の個数は G の位数 $|G|$ の約数である．

例 13. $S = \{C, E, F, O\}$ とし，例 1 で考えた $\mathfrak{S}_6$ の作用

$$\mathfrak{S}_6 \times S^6 \to S^6$$

を考える．このとき，$(C, O, F, F, E, E) \in S^6$ の $\mathfrak{S}_6$-軌道は

$$\begin{aligned} &\mathfrak{S}_6 \cdot (C, O, F, F, E, E) \\ &= \{(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6) \mid X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\text{は } C, O, F, F, E, E \text{ の並べ替え}\} \end{aligned}$$

となる．このとき，軌道・固定群定理より，

$$\mathfrak{S}_6/(\mathfrak{S}_6)_{(C,O,F,F,E,E)} \to \mathfrak{S}_6 \cdot (C, O, F, F, E, E),\ \sigma(\mathfrak{S}_6)_{(C,O,F,F,E,E)} \mapsto \sigma \cdot (C, O, F, F, E, E).$$

は well-defined な全単射写像である．ここで，

$$\begin{aligned} (\mathfrak{S}_6)_{(C,O,F,F,E,E)} &= \{\sigma \in \mathfrak{S}_6 \mid \sigma \cdot (C, O, F, F, E, E) = (C, O, F, F, E, E)\} \\ &= \{e, (3\ 4), (5\ 6), (3\ 4)(5\ 6)\}. \end{aligned}$$

よって，系 11.6 より，

$$|\mathfrak{S}_6 \cdot (C,O,F,F,E,E)| = \frac{|\mathfrak{S}_6|}{|(\mathfrak{S}_6)_{(C,O,F,F,E,E)}|} = \frac{6!}{4} = 180$$

となる．これは C,O,F,F,E,E の 6 文字を横 1 列に並べる方法が全部で 180 通りあるということを群論的な観点から求めているという言い方ができる．このような場合の数が $\frac{6!}{4} = \frac{6!}{2!\cdot 2!}$ で求められるということは知っていた方も多いと思うが，この計算を集合のレベルの全単射に持ち上げて述べているのが軌道・固定群定理であるとも言える．

例 14. 例 6 で考えた作用

$$\mathfrak{S}_3 \times \mathbb{C}[x_1,x_2,x_3] \to \mathbb{C}[x_1,x_2,x_3],$$

を考える．このとき，$1+x_1+x_2x_3 \in \mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$ の $\mathfrak{S}_3$-軌道は，

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_3 \cdot (1+x_1+x_2x_3) &= \{\sigma \cdot (1+x_1+x_2x_3) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_3\} \\ &= \{1+x_1+x_2x_3,\ 1+x_2+x_1x_3,\ 1+x_3+x_1x_2\}\end{aligned}$$

となる．すなわち，与えられた多項式 $f(x_1,x_2,x_3)$ の $\mathfrak{S}_3$-軌道とは $f(x_1,x_2,x_3)$ の変数 x_1,x_2,x_3 の入れ替えによって得られる多項式全体である．軌道・固定群定理の系 11.6 より，$\mathfrak{S}_3$-軌道の元の個数は $|\mathfrak{S}_3| = 6$ の約数なので，与えられた多項式の変数を自由に入れ替えてできる多項式の個数は (もとの多項式も含め)，

$$1,\ 2,\ 3,\ 6$$

通りのいずれかであることがわかる ($1+x_1+x_2x_3$ の場合は上で見たように 3)．同じ議論で，一般に n 変数多項式が与えられたときにその変数を自由に入れ替えてできる多項式の個数は (もとの多項式も含め)，$n!$ の約数となる．なお，上の例では，

$$(\mathfrak{S}_3)_{1+x_1+x_2x_3} = \{e, (2\ 3)\}$$

であることも容易に確かめられる．

他の例も見てみる．$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 \in \mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$ の $\mathfrak{S}_3$-軌道は，

$$\mathfrak{S}_3 \cdot (x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1) = \{\sigma \cdot (x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_3\} = \{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\}$$

となり，

$$(\mathfrak{S}_3)_{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1} = \mathfrak{S}_3$$

である．一般に例 6 の作用において，

$$\mathfrak{S}_n \cdot f(x_1,\dots,x_n) = \{f(x_1,\dots,x_n)\} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathfrak{S}_n)_{f(x_1,\dots,x_n)} = \mathfrak{S}_n$$

であり，これが成り立つとき，すなわちどのように変数を入れ替えても多項式が変化しないとき $f(x_1,\dots,x_n)$ を**対称式 (symmetric polynomial)** という．

もう一つ例を見よう．$(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3) \in \mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$ の $\mathfrak{S}_3$-軌道は，

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_3 \cdot ((x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)) &= \{\sigma \cdot ((x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_3\} \\ &= \{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3),\ -(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)\}\end{aligned}$$

となり，

$$(\mathfrak{S}_3)_{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)} = \{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} = \mathfrak{A}_3$$

である．一般に n 変数多項式の $f(x_1,\dots,x_n)$ うち任意の 2 つの変数を入れ替えると -1 倍されるような多項式を**交代式 (alternating polynomial)** という．$(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)$ は交代式である． 例 6 の作用において，$f(x_1,\dots,x_n)$ が交代式ならば，

- $\mathfrak{S}_n \cdot f(x_1,\dots,x_n) = \{f(x_1,\dots,x_n), -f(x_1,\dots,x_n)\}$

- $(\mathfrak{S}_n)_{f(x_1,\ldots,x_n)} = \mathfrak{A}_n$

が成立する[*3].

例 15. 例 8 で考えた作用

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \left(\theta, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \mapsto \theta \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos\theta)x - (\sin\theta)y \\ (\sin\theta)x + (\cos\theta)y \end{pmatrix}$$

を考える．

- $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき，$\mathbb{R}_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)} = 2\pi\mathbb{Z}$ であったので，軌道・固定群定理より，

$$f_{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)} \colon \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \theta + 2\pi\mathbb{Z} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

  は well-defined な全単射写像である．

- $\mathbb{R}_{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} = \mathbb{R}$ であったので，

$$\mathbb{R}/\mathbb{R}_{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} = \mathbb{R}/\mathbb{R} = \{0 + \mathbb{R}\}\ (0 + \mathbb{R} \text{ という 1 元のみからなる集合})$$

  である．一方，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の $\mathbb{R}$-軌道は

$$\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \theta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

  とやはり 1 元のみからなる集合となっている．よって，確かに，

$$f_{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \colon \mathbb{R}/\mathbb{R}_{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \to \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 + \mathbb{R} \to 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  は well-defined な全単射写像である．

コラム：バーンサイドの補題 (Burnside's lemma) (進んで勉強したい方向け)

「C, O, F, F, E, E の 6 つの文字をちょうど 1 つずつ用いて例 12 で考えたようなネックレスを作るとき何通りのネックレスが作れるか?」という問題を考えてみよう．このような問題はしばしば**数珠順列**の問題と呼ばれる．この問題を群論的な視点から見てみよう．

$$\begin{aligned} S_{\text{coffee}} &:= \{(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6) \mid X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \text{は } C, O, F, F, E, E \text{ の並べ替え } \} \\ &= \mathfrak{S}_6 \cdot (C, O, F, F, E, E) \quad (\text{例 13参照}) \end{aligned}$$

とおく．このとき，例 1 で考えた D_6 の作用

$$D_6 \times S^6 \to S^6$$

は

$$D_6 \times S_{\text{coffee}} \to S_{\text{coffee}}$$

に制限される．このとき，例 12 での考察から，求めるネックレスの総数は命題 11.3 (1) の同値関係 $\sim$ を考えて，

$$|S_{\text{coffee}}/{\sim}| (= S_{\text{coffee}} \text{における } D_6\text{-軌道の総数})$$

[*3] 実は「$\mathfrak{S}_n \cdot f(x_1, \ldots, x_n) = \{f(x_1, \ldots, x_n), -f(x_1, \ldots, x_n)\} \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n)$ は交代式」も成立する．理由を考えてみよ．「$(\mathfrak{S}_n)_{f(x_1,\ldots,x_n)} = \mathfrak{A}_n \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n)$ は交代式」は成立しない．例えば，$(\mathfrak{S}_3)_{1+(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)} = \mathfrak{A}_3$ となるが，$1 + (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$ は交代式ではない．一般に，$(\mathfrak{S}_n)_{f(x_1,\ldots,x_n)} = \mathfrak{A}_n$ のとき，$f(x_1, \ldots, x_n)$ は (対称式)+(交代式) という形になっている．理由を考えてみよ．

の値に等しいということになる．一般に有限集合 X 上に有限群 G が作用しているときに，X における G-軌道の総数を与える公式が以下のバーンサイドの補題である．(これは一般の有限集合 X と有限群 G に対する主張なので，数珠順列の問題だけでなく様々な同様の数え上げに対して適用できるものであることに注意すること．)

定理 11.7 (バーンサイドの補題 Burnside's lemma)

G を有限群とし，$G \times X \to X,\ (g,x) \mapsto g \cdot x$ を有限集合 X 上の G の作用とする．各 $g \in G$ に対し，

$$X^g \coloneqq \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$$

とする．このとき，

$$X \text{ における } G\text{-軌道の総数} = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G}|X^g|$$

である．言葉で書けば，X における G-軌道の総数は G の各元が固定する X の元の個数の平均値として与えられる．

証明.

$$\widetilde{X} \coloneqq \{(g,x) \in G \times X \mid g \cdot x = x\}$$

とする．このとき，

$$\{(g,x) \in G \times X \mid g \in G, x \in X^g\} = \widetilde{X} = \{(g,x) \in G \times X \mid x \in X, g \in G_x\}$$

なので，$\widetilde{X}$ の元の個数を 2 通りの方法で数え上げて，

$$\sum_{g \in G}|X^g| = |\widetilde{X}| = \sum_{x \in X}|G_x|$$

となる．ここで，系 11.6 より，

$$\sum_{x \in X}|G_x| = \sum_{x \in X}\frac{|G|}{|G \cdot x|} = |G| \cdot \sum_{x \in X}\frac{1}{|G \cdot x|}$$

となる．ここで，命題 11.3 (1) の同値関係 $\sim$ を考え，$\sim$ の完全代表系 $R \subset X$ を取ると，

$$\sum_{x \in X}\frac{1}{|G \cdot x|} = \sum_{x \in R}\sum_{x' \in X; x' \sim x}\frac{1}{|G \cdot x'|}$$

となるが，同値関係の一般論 (第 8 回講義資料命題 6.3) と $\sim$ の定義より，

$$x' \sim x \quad \Leftrightarrow \quad G \cdot x = G \cdot x'$$

なので，

$$\sum_{x' \in X; x' \sim x}\frac{1}{|G \cdot x'|} = \sum_{x' \in X; x' \in G \cdot x}\frac{1}{|G \cdot x|} = |G \cdot x| \cdot \frac{1}{|G \cdot x|} = 1$$

となる．以上の計算を合わせると，

$$\begin{aligned}
\sum_{g \in G}|X^g| &= \sum_{x \in X}|G_x| \\
&= |G| \cdot \sum_{x \in X}\frac{1}{|G \cdot x|} \\
&= |G| \cdot \sum_{x \in R}\sum_{x' \in X; x' \sim x}\frac{1}{|G \cdot x'|} \\
&= |G| \cdot \sum_{x \in R} 1 \\
&= |G| \cdot |R| = |G| \cdot |X/{\sim}|.
\end{aligned}$$

よって，

$$X \text{ における } G\text{-軌道の総数} = |X/\sim| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|$$

となる． $\square$

最後にバーンサイドの補題を用いて，S_{coffee} における D_6-軌道の総数を求めてみよう．例えば，$e \in D_6$ は S_{coffee} 上に恒等変換として作用するので，

$$S_{\mathrm{coffee}}^e = \{(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5,X_6) \in S_{\mathrm{coffee}} \mid e\cdot(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5,X_6) = (X_1,X_2,X_3,X_4,X_5,X_6)\} = S_{\mathrm{coffee}}$$

である．一方，$\sigma \in D_6$ に対しては，

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{coffee}}^{\sigma} &= \{(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5,X_6) \in S_{\mathrm{coffee}} \mid \sigma\cdot(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5,X_6) = (X_1,X_2,X_3,X_4,X_5,X_6)\} \\ &= \{(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5,X_6) \in S_{\mathrm{coffee}} \mid (X_6,X_1,X_2,X_3,X_4,X_5) = (X_1,X_2,X_3,X_4,X_5,X_6)\} \\ &= \{(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5,X_6) \in S_{\mathrm{coffee}} \mid X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = X_5 = X_6\} = \varnothing \end{aligned}$$

となる．$\tau \in D_6$ で考えてみると，

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{coffee}}^{\tau} &= \{(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5,X_6) \in S_{\mathrm{coffee}} \mid \tau\cdot(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5,X_6) = (X_1,X_2,X_3,X_4,X_5,X_6)\} \\ &= \{(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5,X_6) \in S_{\mathrm{coffee}} \mid (X_1,X_6,X_5,X_4,X_3,X_2) = (X_1,X_2,X_3,X_4,X_5,X_6)\} \\ &= \{(X_1,X_2,X_3,X_4,X_5,X_6) \in S_{\mathrm{coffee}} \mid X_2 = X_6, X_3 = X_5\} \\ &= \{(C,E,F,O,F,E),(O,E,F,C,F,E),(C,F,E,O,E,F),(O,F,E,C,E,F)\} \end{aligned}$$

となる．このように計算していくと，

$$\begin{aligned} &|S_{\mathrm{coffee}}^e| = 180, \qquad |S_{\mathrm{coffee}}^{\sigma^i}| = 0 \quad (i = 1,\ldots,5) \\ &|S_{\mathrm{coffee}}^{\tau}| = |S_{\mathrm{coffee}}^{\sigma^2\tau}| = |S_{\mathrm{coffee}}^{\sigma^4\tau}| = 4, \qquad |S_{\mathrm{coffee}}^{\sigma\tau}| = |S_{\mathrm{coffee}}^{\sigma^3\tau}| = |S_{\mathrm{coffee}}^{\sigma^5\tau}| = 0 \end{aligned}$$

となる．(詳細は各自計算せよ．) よって，バーンサイドの補題より，

$$S_{\mathrm{coffee}}\text{における } D_6\text{-軌道の総数} = \frac{1}{|D_6|}\sum_{g\in G}|S_{\mathrm{coffee}}^g| = \frac{1}{12}(180 + 5\times 0 + 3\times 4 + 3\times 0) = 16$$

となる．これより，C,O,F,F,E,E の 6 つの文字をちょうど 1 つずつ用いて例 12 で考えたようなネックレスを作る場合の数は 16 通りである．