代数学 I 第 1 回復習レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

$\boxed{ア}$ 次以上の一般代数方程式はその係数の加減乗除と根号による解の公式を持たず，$\boxed{ア}$ 次未満の一般代数方程式はその係数の加減乗除と根号による解の公式を持つ．このとき，$\boxed{ア}$に入る自然数を半角数字で入力せよ．ここで，$\boxed{ア}$に入るのは整数なので，2 桁以上の数もあり得ることに注意せよ．なお，n 次一般代数方程式とは x を未知数とする $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ という形の方程式を指す．

問題 1 解答例. 5 □

問題 1 補足解説. 講義内でも述べたようにこの事実について「5 次以上の一般代数方程式には解がない」とか「5 次以上の一般代数方程式はその係数だけから解を決める方法は一切ない」というようにとらえるのは誤りであることに注意しよう．5 次以上の一般代数方程式にも解は存在するが，<u>その加減乗除と根号による</u>解の公式は作れないというのが正確な事実である．また，特殊な個別の方程式については 5 次以上でも容易に手で解けるものはたくさんあるので ($x^n - 1 = 0$ 等)，あくまでこの事実は 5 次以上の<u>一般</u>代数方程式に対しての主張であるということを認識しておく必要がある． □

問題 2

$X = \{1, 2\}$ とする．このとき，直積集合 $X \times X$ の具体形として正しいものを選択せよ．

(1) $\{1, 2, 4\}$
(2) $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$
(3) $\{4\}$

問題 2 解答例. (2) □

問題 2 補足解説. 一般に集合 X, Y に対し，その直積集合 $X \times Y$ は第一成分が X の元，第二成分が Y の元である順序対全体からなる集合である．すなわち，

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

である．$\times$ は数の掛け算にも用いる記号であるが，X や Y が本問のように数からなる集合であっても掛け算を考えるわけではないので注意しよう．(なお，集合 $X \times Y$ の元の個数は X の元の個数と Y の元の個数を掛けたものになるので，この意味では直積集合を考えることは掛け算的な操作になっている．) □

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

問題 3

写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$x \mapsto 2^x$$

で定義する．このとき，以下の (1)–(4) の中から正しい文章を選択せよ．

(1) f は全単射である．
(2) f は単射であるが全射ではない．
(3) f は全射であるが単射ではない．
(4) f は全射でも単射でもない．

問題 3 解答例. (2) □

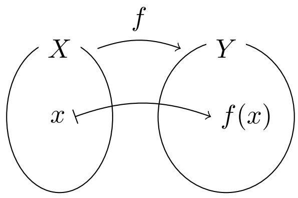
問題 3 補足解説. 任意の $x \neq y$ なる $x, y \in \mathbb{R}$ に対し，$2^x \neq 2^y$ なので $f(x) \neq f(y)$．よって，f は単射である．一方，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $2^x > 0$ なので，f は全射ではない (例えば $f(x) = -1$ となる $x \in \mathbb{R}$ は存在しない)．以上より，f は単射であるが全射ではない．

写像の用語の復習

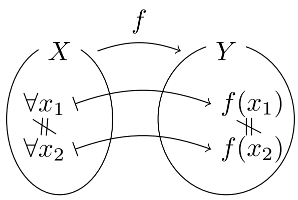
集合 X, Y に対して，**写像** $f\colon X \to Y$ とは，X の各元 x に対して，集合 Y のある元 $f(x)$ を対応させる対応のことである．この写像を

$$f\colon X \to Y,\ x \mapsto f(x)$$

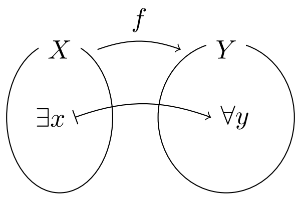
というように表す．(例：$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$．このとき，例えば $f(1) = 1^2 = 1, f(2) = 2^2 = 4$．) このとき，$X$ を f の**定義域**，Y を f の**終域**という．



写像 $f\colon X \to Y$ が**単射**であるとは，任意の $x_1 \neq x_2$ なる $x_1, x_2 \in X$ に対して，$f(x_1) \neq f(x_2)$ となることである．(上の例は，$1 \neq -1$ に対し，$f(1) = 1 = (-1)^2 = f(-1)$ なので単射ではない．)



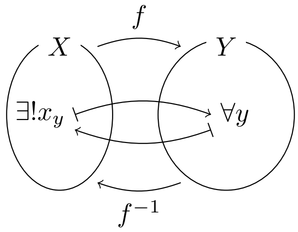
写像 $f\colon X \to Y$ が**全射**であるとは，任意の $y \in Y$ に対し，ある $x \in X$ が存在して，$f(x) = y$ となるということである．(上の例では，$-1 \in \mathbb{R}$ に対して，$f(x) = x^2 = -1$ となる $x \in \mathbb{R}$ は存在しないので，全射ではない．)



写像 $f\colon X \to Y$ が全射かつ単射であるとき，f は**全単射**であるという．このとき，各 $y \in Y$ に対し，$f(x_y) = y$ となる $x_y \in X$ が必ずただ 1 つだけ存在するので，y に対してこの x_y を対応させることで，写像

$$Y \to X,\ y \mapsto x_y$$

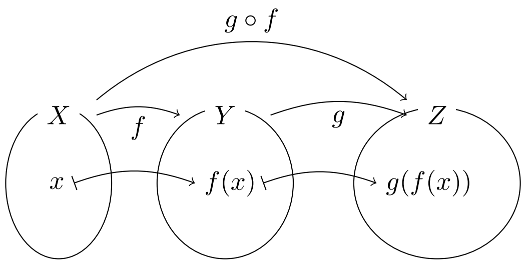
が得られる．これを f の**逆写像**といい，f^{-1} と書く．



写像 $f\colon X \to Y, g\colon Y \to Z$ に対し，写像の合成 $g \circ f\colon X \to Z$ とは，

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),\ x \in X$$

で定まる写像である．



写像 $f\colon X \to Y$ が全単射のとき，

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X \text{ かつ } f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$$

である．ここで，$\mathrm{id}_Z\colon Z \to Z$ は**恒等写像** $z \mapsto z$ $(Z = X, Y)$ である．逆に写像 $f\colon X \to Y$ に対し，

$$f' \circ f = \mathrm{id}_X \text{ かつ } f \circ f' = \mathrm{id}_Y$$

となる写像 $f'\colon Y \to X$ が存在するとき，f は全単射であり，$f' = f^{-1}$ である． □

問題 4

A を複素数を成分に持つ n 次正方行列とする．このとき，以下の文章の中から正しいものを全て選択せよ (全て正しく選択できて 1 点)．

(1) A の逆行列とは，$AA' = I_n$ を満たす n 次正方行列 A' のことである．(I_n は n 次単位行列．)
(2) A の逆行列とは，$A + A' = O_n$ を満たす n 次正方行列 A' のことである．(O_n は n 次零行列．)
(3) A が正則であるとは A が逆行列を持つことである．
(4) A が正則であることと，A の行列式 $\det(A)$ が 0 でないことは同値である．
(5) A が正則であることと，A が対角化可能であることは同値である．

問題 4 解答例． (1),(3),(4) □

問題 4 補足解説． (1) は逆行列の定義，(3) は正則性の定義である．(4) については併せて以下を思い出しておこう．

複素数を成分に持つ n 次正方行列 A に対して，以下の 4 つは全て同値である．

(i) A は正則である．
(ii) $\det(A) \neq 0$.
(iii) 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のみである．
(iv) $\mathrm{rank}(A) = n$.

これより，A が逆行列を持つかどうか調べるためには例えば行列式 $\det(A)$ を計算して 0 になるかどうかを調べれば良いのであった．

(5) については，例えば，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

というような行列を考えれば，行列式の値が 0 であるが対角化可能 (すでに対角化されている) 例があることがわかる．このような例を頭に入れておけば対角化可能性と行列式の値が 0 であるかどうかは関係がないということがわかる (もちろん「行列式の値が 0 であるが対角化可能な例」として零行列を挙げてもよい)． □

問題 5

n 次正方行列 X に対して，その行列式を $\det(X)$ と書くことにする．A, B を n 次正方行列としたとき，以下の文章の中から正しいものを全て選択せよ (全て正しく選択できて 1 点)．

(1) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ である．
(2) $\det(AB)$ の値は一般には $\det(A)$ と $\det(B)$ の値から計算できるものではない．
(3) $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ である．
(4) $\det(A+B)$ の値は一般には $\det(A)$ と $\det(B)$ の値から計算できるものではない．

問題 5 解答例． (1), (4) □

問題 5 補足解説． (1) は行列式の非常に大事な性質なので必ず頭に入れておくようにしよう．一方，行列式は行列の和とは相性が良くない．例えば，

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるが，

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

である．2 つの 0 という値から 1 という値を算出することはできないので，$\det(A+B)$ の値は一般には $\det(A)$ と $\det(B)$ の値から計算できるものではないということがこの例から見て取れる． □